

UFPA

PPGEC

Universidade Federal do Pará



Fábio Santos de Sousa

Análise Analítica e Numérica para Determinação do Fator de Intensidade de Tensão e Tensão Residual em Compósitos de Matriz Cimentícia e Fibra de Carbono

TESE DE DOUTORADO

Instituto de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Tese orientada pelo

Professor Dr. Alcebíades Negrão Macêdo

Belém – Pará – Brasil

2024

Fábio Santos de Sousa

Análise Analítica e Numérica para Determinação do fator de Intensidade de Tensão e Tensão Residual em Compósitos de Matriz Cimentícia e Fibra de Carbono

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Alcebíades Negrão Macêdo

Belém, 28 de fevereiro de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- D278a de Sousa, Fábio.
Análise Analítica e Numérica para Determinação do fator de
Intensidade de Tensão e Tensão Residual em Compósitos de Matriz
Cimentícia e Fibra de Carbono / Fábio de Sousa. — 2024.
200 f. : il. color.
- Orientador(a): Prof. Dr. Alcebiades Macêdo
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil,
Belém, 2024.
1. laminado. 2. fibras de carbono. 3. tenacidade à fratura.
4. fator de intensidade de tensão. 5. tensão residual. I. Título.

CDD 624

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



ANÁLISE ANALÍTICA E NUMÉRICA PARA DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO E TENSÃO RESIDUAL EM COMPÓSITOS DE MATRIZ CIMENTÍCIA E FIBRA DE CARBONO

AUTOR:

FÁBIO SANTOS DE SOUSA

TESE SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL NA ÁREA DE ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO EM: 28 / 02 / 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Alcebiades Negrão Macêdo
Orientador (UFPA)

Prof. Dr. Luis Antônio Guimarães Bitencourt Junior
Membro Externo (USP)

Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto
Membro Externo (UFPA)

Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira
Membro Interno (UFPA)

Prof. Dr. Edilson Moraes Lima e Silva
Membro Interno (UFPA)

Visto:

Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira
Coordenador do PPGEC / ITEC / UFPA

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sabedoria e saúde; sem ele, nada seria possível.

À minha família pelo apoio e educação ao longo desse caminho.

Ao Prof. Dr. Alcebíades Negrão Macêdo pela oportunidade de realizar esta pesquisa.

Aos professores da UFPA e IFPA que contribuíram valiosamente na minha formação acadêmica.

A sabedoria começa na reflexão.

Sócrates

RESUMO

A presente tese visa criar e analisar laminados de matriz cimentícia reforçados com fibras de carbono, avaliando o aspecto mecânico (fator de intensidade de tensão), influência da temperatura (tensão residual) e aspecto termomecânico por meio de modelos numéricos e analíticos. Materiais cimentícios apresentam baixa resistência à tração e tenacidade à fratura. As propriedades podem ser aprimoradas com a inserção de fibras sintéticas, como as fibras de carbono, que podem apresentar ângulos diferentes dentro da matriz. O trabalho focou na determinação do fator de intensidade de tensão (K) em materiais de matriz cimentícia, criando modelos numéricos usando FEM e XFEM. Através da combinação programação mais software Abaqus, criaram-se modelos numéricos para determinação do fator de intensidade de tensão em laminados de concreto com fibras de carbono, tanto para modo I de carregamento como modo misto. Criou-se também modelo termomecânico para determinação do K de argamassa reforçada com fibras de carbono, onde foram analisadas a influência da temperatura (tensão residual), abertura da trinca e o fator de intensidade tensão. Além disso, no estudo da tensão residual de materiais cimentícios reforçados com fibras de carbono, criaram-se modelos do tipo *shell* e sólido, e realizou-se uma comparação através de programação em python. Tanto FEM como XFEM podem ser usados para determinação do fator de intensidade de tensão em materiais cimentícios ao considerá-los materiais homogêneos e isotrópicos. A influência da fibra no K nesses materiais é linear com a mudança de orientação das fibras tanto no modo I como no modo misto. No modelo termomecânico de argamassa com fibras de carbono, o comportamento da relação temperatura, abertura de trinca e fator de intensidade de tensão não é linear. Observou-se nos resultados que os ângulos das fibras também influenciam na tensão residual do laminado para mesma variação de temperatura. O comportamento é praticamente linear tanto nas camadas externas a 0° quanto nas camadas intermediárias em diferentes configurações. Além disso, observou-se uma forte correlação entre o ângulo das fibras e a tensão residual. As comparações dos resultados analíticos e numéricos mostraram boa concordância na tensão residual determinada. Esses resultados indicam que, portanto, existe a possibilidade do uso de fibras de carbono em materiais cimentícios para melhorar a tenacidade à fratura, já que em altas variações de temperatura ocorrem elevadas tensões residuais que comprometem o desempenho do material. A partir dessas conclusões, pode-se verificar possíveis aplicações práticas em materiais estruturais para engenharia civil de laminados de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono.

Palavras-chave: laminado; fibras de carbono; tenacidade à fratura; fator de intensidade de tensão; tensão residual.

ABSTRACT

This thesis aims to create and evaluate cement matrix laminates reinforced with carbon fibers, evaluating the mechanical aspect (stress intensity factor), influence of temperature (residual stress) and thermomechanical aspect through numerical and analytical models. Cementitious materials have low tensile strength and fracture toughness. The properties can be improved with the insertion of synthetic fibers, such as carbon fibers, which can present different angles within the matrix. The work focused on determining the stress intensity factor (K) in cementitious matrix materials, creating models with numerical values using FEM and XFEM. Through the combination of programming and Abaqus software, numerical models were created to determine the stress intensity factor in concrete laminates with carbon fibers, both for loading mode I and mixed mode. A thermomechanical model was created to determine the reinforced KI mortar with carbon fibers, where the influence of temperature (residual stress), crack opening, and the stress intensity factor were analyzed. Furthermore, in the study of the residual stress of cementitious materials reinforced with carbon fibers, shell and solid models were created, and comparisons were made using Python programming. Both FEM and XFEM can be used to determine the stress intensity factor in cementitious materials when considering them as homogeneous and isotropic materials. The influence of the fiber in K on these materials is linear with the change in fiber orientation in both mode I and mixed mode. In the thermomechanical model of mortar with carbon fibers, the behavior of the relationship between temperature, crack opening, and stress intensity factor is not linear. It was observed in the results that the fiber angles also influence the residual stress of the laminate for the same temperature variation. The behavior is practically linear both in the external layers at 0° and in the intermediate layers in different configurations, and a strong correlation was observed between the fiber angle and the residual stress. Comparisons of analytical and numerical results showed good agreement in the determined residual stress. These results indicate that, therefore, there is the possibility of using carbon fibers in cementitious materials to improve fracture toughness, as high residual stresses occur at high-temperature variations that compromise the performance of the material. From these conclusions, it is possible to verify possible practical applications in structural materials for civil engineering of cement matrix laminates reinforced with carbon fibers.

Keywords: laminate; carbon fibers; fracture toughness; stress intensity factor; residual stress.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Primeiro edifício do mundo feito inteiramente de concreto reforçado com fibra de carbono.....	17
Figura 2 Classificação hierárquica de compósitos sintéticos e naturais	28
Figura 3 Lâminas submetidas à esforços de tração uniaxial longitudinais com reforço do tipo (a) unidirecional; (b) tecido bidirecional balanceado; (c) fibras “picadas”; e (d) manta contínua.....	28
Figura 4 Lâmina unidirecional	29
Figura 5 Exemplos de laminados simétricos. As orientações da camada e as propriedades do material são simétricas sobre a superfície média. (a) Symmetric angle-ply e (b) symmetric cross-ply	30
Figura 6 Exemplos de laminados assimétricos angle-ply. Embora as orientações das camadas sejam antissimétricas sobre a superfície média, a distribuição do material é simétrica.....	31
Figura 7 Vista explodida do laminado quase isotrópico [+60/0/-60].	31
Figura 8 Exemplo de configuração de um laminado	32
Figura 9 Forças e momentos atuando no laminado (topo). Resultantes de forças no laminado (abaixo).....	34
Figura 10 Tensão e módulo de elasticidade para diferentes tipos de fibras de carbono.....	42
Figura 11 Curva de tensão/deformação para diferentes tipos de fibras.....	43
Figura 12 Comparação da abordagem da mecânica da fratura ao projeto com a abordagem tradicional de resistência dos materiais: (a) a abordagem da resistência dos materiais e (b) a abordagem da mecânica da fratura/ tamanho da falha.....	46
Figura 13 Trinca passante numa placa submetida a uma tensão trativa remota.....	47
Figura 14 Modos de solicitações	48
Figura 15 Distribuição de tensão no entorno da ponta da trinca	49
Figura 16 Processo esquemático de zona dentro da região de domínio J.(a) Domínio J e (b) embotamento da ponta da fissura.....	53

Figura 17 Ilustração esquemática do crescimento de fissuras no concreto, juntamente a dois modelos simplificados: (a) crescimento de fissuras no concreto; (b) zona de processo idealizada como uma zona de amolecimento de tensão; e (c) zona de processo idealizada por tensões de fechamento	55
Figura 18 Modelagem numérica do concreto	59
Figura 19 Módulo longitudinal de tensão de cisalhamento em (a) RVE quadrado com fibra circular e (b) RVE hexagonal com fibra circular	60
Figura 20 2D modelo FEA Arcan Test do amostra a antes e (b) depois da análise numérica	61
Figura 21 Geometria, dimensões e representação em elementos finitos de um teste para compressão em laminados <i>quasi</i> -isotrópico [90/45/0/-45] _{4s} IM7/8552	62
Figura 22 Modelagem de descontinuidades fracas e fortes nas técnicas de FEM padrão e FEM enriquecido: (a) Propagação de trinca em uma placa com furo; (b) O FEM padrão usando um refinamento de malha adaptável em que a malha está de acordo com a geometria das interfaces; (c) A técnica de MEF enriquecido usando uma malha uniforme na qual os elementos cortados pelas interfaces são enriquecidos.....	63
Figura 23 Vetor de deslocamento de elementos enriquecidos	64
Figura 24 Definindo uma trinca para XFEM.....	66
Figura 25 Malha focada típica para avaliação da mecânica da fratura.....	67
Figura 26 Vista esquemática da formação de tensão residual e vista frontal da deformação fora do plano em laminado de camada cruzada desbalanceada. M: momento fletor.....	73
Figura 27 Modelo micromecânico de elementos finitos 3D de compósito de matriz polimérica reforçada com fibra.....	75
Figura 28 Modelo de elementos finitos de arranjos de fibras regulares; r: raio das fibras;(a) arranjo quadrado;(b) arranjo hexagonal; (c) arranjo de diamante	75
Figura 29 Compósitos laminados com diferentes angulações – Análise feita usando HyperMesh	76
Figura 30 Estrutura de estudo da tese	77
Figura 31 Desenho esquemático do corpo de prova dos Vantadori <i>et al.</i> (2016).....	78

Figura 32 Modelo numérico do concreto com $\alpha=0.5$	80
Figura 33 Ensaio de três pontos para determinação do CMOD	81
Figura 34 Fluxograma de como analisar a fratura dos materiais no Abaqus	81
Figura 35 Desenho esquemático do modelo de Xargay <i>et al.</i> (2018).....	82
Figura 36 Modelo para análise de dano no concreto	83
Figura 37 Malha do modelo numérico com as dimensões da RILEM (malha de 15 mm)	83
Figura 38 Domínio da trinca no modelo numérico.....	84
Figura 39 Fluxo das etapas da análise de compósitos	85
Figura 40 A geometria do laminado (a) parte da seção do laminado (b) Modo puro I (c)	86
Figura 41 Modelo de concreto com entalhe em uma das arestas	88
Figura 42 A geometria do laminado (a) da seção laminado (b)	91
Figura 43 A geometria do modelo em Abaqus FEM (a) malha do modelo (b) ampliação da trinca no modelo (c).....	93
Figura 44 A geometria do modelo em Abaqus XFEM (a) malha do modelo (b) ampliação da trinca no modelo (c).....	94
Figura 45 Detalhe do corpo de prova de compósito de matriz cimentícia com fibras bidirecionais de fibras de carbono	96
Figura 46 Modelo numérico de argamassa reforçada bi direcional de fibras de carbono	96
Figura 47 Interação entre fibra e a matriz no modelo numérico	98
Figura 48 Região interna da malha no modelo de compósito	98
Figura 49 Visualização da região interna do compósito.....	99
Figura 50 Ampliação do modelo com fibras de carbono bidirecionais	99
Figura 51 Fluxograma para análise termomecânica de modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono	100
Figura 52 Modelo usado para análise térmica do compósito	101
Figura 53 Ampliação do modelo para análise térmica	102

Figura 54 Amostra de compósito laminado cross-ply [0 ₄ /90 ₄] simétrico.....	103
Figura 55 Modelo de laminado (a) visão geral (b) seção do modelo	104
Figura 56 Modelo 3D de um laminado de epóxi reforçado com fibras de vidro(a) e (b) ampliação.....	105
Figura 57 Seção do laminado com fibras em diferentes orientações modelado no Abaqus	108
Figura 58 Gráfico Força x CMOD do experimento de Xargay <i>et al.</i> (2018)	109
Figura 59 Comparação do ensaio experimental e numérico -CMOD	110
Figura 60 Visualização sequencial da evolução da trinca para CMOD=0.5, 0.5, 1.00, 2.00 e 3.00 mm	111
Figura 61 Tensão S22 no modelo numérico de concreto usando XFEM.....	112
Figura 62 Tensão final na análise do modelo numérico do concreto	112
Figura 63 Deslocamento U2 no modelo numérico do concreto	113
Figura 64 Evolução do dano do concreto usando XFEM.....	114
Figura 65 Gráfico da função da flecha e CMOD no modelo numérico	115
Figura 66 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados	115
Figura 67 Deslocamento de laminado de concreto e fibra de carbono com entalhe na borda	116
Figura 68 Distribuição de tensão na ponta da trinca. a) visão geral, b) ampliação	118
Figura 69 Deslocamento vertical máximo(U) x ângulo de orientação da fibra dos laminados de concreto / fibra de carbono	119
Figura 70 Variação da tensão para U _{máx} ao redor da ponta da trinca do compósito para diferentes orientações da fibra	120
Figura 71 Variações de KI com ângulo de orientação da fibra para tensão máxima	121
Figura 72 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados-FEM	124
Figura 73 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados-	

XFEM	125
Figura 74 Tensão máxima na ponta da trinca tanto para o método FEM (a) quanto para o método XFEM(b)	126
Figura 75 KI de laminado com variação ângulo de fibra e de trinca.....	127
Figura 76 Tensão máxima na ponta da trinca de laminado com variação de ângulo de fibra e de trinca	128
Figura 77 Análise de convergência para modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono	130
Figura 78 Gráfico experimental e numérico (calibração e validação do modelo), na primeira região é predominante o comportamento do compósito e na segunda região é a de predominância das fibras	131
Figura 79 Comparação entre modelo experimental de Truong et al. (2019) e numérico do Autor.....	132
Figura 80 Tensão máxima no modelo numérico	133
Figura 81 Análise de convergência do modelo numérico usando FEM.....	133
Figura 82 Gráfico das funções das relações entre ângulo de trinca e fator de intensidade de tensão para argamassa reforçada com fibras de carbono usando XFEM ou FEM	135
Figura 83 Condição de contorno modelo termomecânico desacoplado para argamassa reforçada com fibras de carbono	135
Figura 84 Corte mostrando a região interna do material(modelo termomecânico desacoplado).....	136
Figura 85 Modelo numérico (translúcido) mostrando o interior do material	136
Figura 86 Fluxo de calor entorno da trinca no modelo numérico	137
Figura 87 Vetores de fluxo de calor ao redor da trinca	137
Figura 88 Gráfico relação entre abertura da trinca, fator de intensidade de tensão e temperatura	138
Figura 89 Influência da temperatura nas fibras de carbono (modelo separado).....	139
Figura 90 Tensão máxima no modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono	139

Figura 91 Magnitude do deslocamento no modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono.....	140
Figura 92 Deslocamento U1 do modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono	140
Figura 93 Sequência de deformações provocadas pela mudança de temperatura no modelo numérico	141
Figura 94 Gráfico da função da relação entre KI e a temperatura.....	142
Figura 95 Comparação entre os métodos para determinar a tensão residual em laminados (experimental × numérico)	143
Figura 96 Orientação das fibras no modelo numérico de laminado de matriz polimérica reforçada com fibras de	143
Figura 97 Tensão S11(MPa) no modelo numérico termomecânico do laminado	144
Figura 98 Tensão S22(MPa) no modelo numérico termomecânico do laminado	144
Figura 99 Convergência do modelo do laminado para tensão residual	145
Figura 100 Simulação da tensão residual computacional do laminado	146
Figura 101 Tensão residual do laminado[0/15/15]s em Sxx em função da espessura	148
Figura 102 Tensão residual do laminado[0/15/15]s em Syy em função da espessura	148
Figura 103 Tensão residual do laminado[0/45/45]s em Sxx em função da espessura	149
Figura 104 Tensão residual do laminado[0/45/45]s em Syy em função da espessura	150
Figura 105 Tensão residual do laminado[0/90/90]s em Sxx em função da espessura	150
Figura 106 Tensão residual do laminado[0/90/90]s em Syy em função da espessura	151
Figura 107 Tensão residual do laminado Sxx (camada 0°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]s), 2 ([0/45/45]s) e 3([0/15/15]s).....	152
Figura 108 Tensão residual do laminado Syy (camada 0°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]s), 2 ([0/45/45]s) e 3([0/15/15]s).....	153
Figura 109 Tensão residual do laminado Sxx (camada 2 de 90° a 15°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]s), 2 ([0/45/45]s) e 3([0/15/15]s)	153
Figura 110 Tensão residual do laminado Syy (camada 2 de 90° a 15°) em T1, T2 e T3	

para os laminados 1([0/90/90]s), 2 ([0/45/45])s e 3([0/15/15]s)	154
---	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Propriedades mecânicas/físicas de diferentes fibras	44
Tabela 2 Valores típicos de tenacidade à fratura, KIC, em estado plano de deformação	50
Tabela 3 Soluções de KI para amostras de testes comuns.....	51
Tabela 4 Configuração laminado e ângulo de trinca	90
Tabela 5 Dados de entrada no Abaqus para o modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono.....	96
Tabela 6 Propriedades térmicas dos materiais.....	101
Tabela 7 Propriedades da lâmina.....	103
Tabela 8 Coeficiente de expansão térmica de uma lâmina epóxi/fibra de vidro	104
Tabela 9 Propriedades físicas/térmicas dos materiais	105
Tabela 10 Comparação dos resultados experimentais com o modelo computacional usando FEM e XFEM.....	110
Tabela 11 Parâmetros de análise de convergência	116
Tabela 12 Tensões máximas, deformações e resultado de FEM do KI de concreto reforçado com fibras de carbono em diferentes ângulos de orientação de fibras.....	117
Tabela 13 Parâmetros de análise de convergência – FEM	124
Tabela 14 Parâmetros de análise de convergência - XFEM.....	125
Tabela 15 Tensões máximas e KI e para os laminados com diferentes ângulos de orientação.....	127
Tabela 16 Fator de intensidade de tensão numérico para argamassa reforçada com fibras de carbono usando FEM e XFEM	134
Tabela 17 Tensão residual em função da temperatura para diferentes configurações de laminados.....	147

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

KI	Fator de intensidade de tensão modo I de carregamento
KI _c	Fator de intensidade de tensão crítico (tenacidade à fratura)
SIF	<i>Stress Intensity Factor</i>
G	Taxa de liberação de energia
J	Integral J
XFEM	<i>Extended finite element method</i>
SXX-	Tensão residual no eixo XX
SY-YY-	Tensão residual no eixo YY
CMOD	<i>Crack mouth opening displacement</i>
CRF	Concreto reforçado com fibras
SENB	<i>Single-edge notched bend</i>
LEFM	<i>Linear elastic fracture mechanics</i>
FEM	<i>Finite element method</i>
CLT	<i>Classical lamination theory</i>
ROM	<i>Rule of mixtures</i>
v_t	Volume total
v_v	Volume de vazios
V	Frações volumétricas
V_F	Fração volumétrica de fibras
V_M	Fração volumétrica da matriz
V_V	Fração volumétrica de vazios
E_f	Módulo de elasticidade da fibra
E_m	Módulo de elasticidade da matriz
n_x	Força normal na seção x
n_y	Força normal na seção y
n_{xy}	Força de cisalhamento xy
m_x	Momento de flexão x
m_y	Momento de flexão y
m_{xy}	Momento de torção
$\{\hat{N}\}$	Força total
$\{\hat{M}\}$	Momento total

$\{\hat{n}\}$	Força resultante
$\{\hat{m}\}$	Momento resultante
$\{\hat{\varepsilon}_k\}$	Deformação em uma k lamina
$[S]_k$	Matriz de flexibilidade em uma k lamina
$\{\sigma\}_k$	Tensão em uma k lamina
ε_1	Deformação no eixo 1 da fibra
ε_2	Deformação no eixo 2 da fibra
ε_3	Deformação no eixo 3 da fibra
γ_{23}	Deformação angular na lamina no plano (2,3)
γ_{13}	Deformação angular na lamina no plano (1,3)
γ_{12}	Deformação angular na lamina no plano (1,2)
σ_1	Tensão no eixo 1 da fibra
σ_2	Tensão no eixo 2 da fibra
σ_3	Tensão no eixo 3 da fibra
τ_{23}	Tensão de cisalhamento no plano (2,3)
τ_{13}	Tensão de cisalhamento no plano (1,3)
τ_{12}	Tensão de cisalhamento no plano (1,2)
ν_{12}	Coeficiente de Poisson quando o esforço normal corre na
direção das fibras	
G_{12}	O módulo de cisalhamento no plano (1,2)
σ_x	Tensão no eixo x
σ_y	Tensão no eixo y
γ_{xy}	Deformação angular na lamina
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento xy
ε^0	Deformação no plano médio da placa
k	Curvaturas de flexão
ν_y	Poisson y
ν_x	Poisson x
γ_{yz}	Deformação angular na lamina yz
γ_{xz}	Deformação angular na lamina xz
z_k	Coordenada z relativa à espessura do laminado
k_x	Curvaturas de flexão em x
k_y	Curvaturas de flexão em y

k_{xy}	Curvaturas de torção xy
[A]	Matriz de rigidez no plano do laminado
[B]	Matriz de rigidez de acoplamento do laminado
[D]	Matriz de rigidez à flexão/torção do laminado
[H]	Matriz de rigidez ao cisalhamento
[Q]	Matriz de rigidez de uma lâmina
$[\bar{Q}]$	Matriz de rigidez transformada da lâmina
[S]	Matriz de flexibilidade de uma lâmina
[T]	Matriz de transformação
E1	Módulo de Young da fibra na direção longitudinal da fibra
E2	Módulo de Young na direção transversal da fibra

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Justificativa	23
1.2	Objetivos da pesquisa	24
<i>1.2.1</i>	<i>Objetivo Geral</i>	<i>24</i>
<i>1.2.2</i>	<i>Objetivos Específicos.....</i>	<i>25</i>
1.3	Estrutura do Trabalho.....	26
2	MATERIAIS COMPÓSITOS ESTRUTURAIS	27
2.1	Materiais Compósitos	27
2.2	Lâmina	28
<i>2.2.1</i>	<i>Regra das misturas (ROM)</i>	<i>29</i>
2.3	Métodos Analíticos para Laminados	30
<i>2.3.1</i>	<i>Tipos de configurações de laminados.....</i>	<i>30</i>
<i>2.3.2</i>	<i>Teoria Clássica do Laminado — Classical Lamination Theory (CLT).....</i>	<i>32</i>
<i>2.3.3</i>	<i>ABD-Matriz</i>	<i>37</i>
2.4	Compósitos cimentícios.....	40
2.5	Fibras Sintéticas	41
<i>2.5.1</i>	<i>Fibras de carbono</i>	<i>41</i>
2.6	Materiais cimentícios com fibras	43
3	MECÂNICA DA FRATURA DE MATERIAIS	46
3.1	Equação de Griffith	47
3.2	Modos de Solicitação.....	48
3.3	Fator de intensidade de tensão.....	48
3.4	Mecânica da Fratura Linear Elástica	52
3.5	Mecânica de Fratura Elasto-Plástica	52

3.6	Influências das fibras no Fator de Intensidade de Tensão em materiais compósitos cimentícios.....	54
4	ELEMENTOS FINITOS.....	58
4.1	Análise por elementos finitos	58
4.2	Método dos elementos finitos estendidos (XFEM)	62
4.3	Integral de contorno com o método dos elementos finitos	66
5	TENSÃO RESIDUAL EM COMPÓSITOS.....	68
5.1	Efeitos da Tensão residual.....	69
5.2	Tensões residuais em materiais compósitos.....	70
5.3	A importância da medição de tensão residual.....	71
5.4	Macrotensões residuais.....	72
5.5	Métodos numéricos	74
6	MATERIAIS E MÉTODOS	77
6.1	Modelo - calibração do modelo numérico e validação para determinação do fator de intensidade de tensão	78
6.2	Modelo – concreto	80
6.2.1	<i>Modelo numérico de dano do concreto usando XFEM.....</i>	80
6.2.2	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão</i>	84
6.3	Modelo analítico e numérico para laminados de matriz cimentícia e fibras sintéticas	84
6.3.1	<i>Modelo analítico para determinação do fator de intensidade de tensão em corpo de prova com geometria tipo SENB.....</i>	87
6.3.2	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão em corpo de prova com geometria tipo SENB.....</i>	88
6.4	Modelo - teórico e numérico determinação no fator de intensidade de tensão usando FEM x XFEM em corpo de prova com geometria tipo Center-Cracked Tension (CCT)	89
6.4.1	<i>Teoria para determinação do fator de intensidade de tensão – Center-Cracked</i>	

	<i>Tension (CCT)</i>	91
6.4.2	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade – Center-Cracked Tension (CCT)</i>	92
6.5	<i>Modelo – Argamassa reforçada com fibras de carbono</i>	95
6.5.1	<i>Modelo numérico de dano (análise não linear)</i>	95
6.5.2	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão (análise linear)</i>	97
6.5.3	<i>Modelo termomecânico para determinação fator de intensidade de tensão, CMOD e temperatura (análise linear)</i>	100
6.6	<i>Modelo termomecânico para laminado com fibras sintéticas</i>	102
6.6.1	<i>Modelo tipo Shell para determinação da tensão residual</i>	103
6.6.2	<i>Modelo tipo sólido para determinação da tensão residual</i>	105
6.6.3	<i>Modelo para determinação da tensão residual de laminado de matriz cimentícia e fibra de carbono</i>	106
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	109
7.1	<i>Modelo – calibração do modelo numérico e validação para determinação do fator de intensidade de tensão</i>	109
7.2	<i>Modelo – concreto</i>	110
7.2.1	<i>Modelo numérico de dano e KI do concreto usando XFEM</i>	110
7.3	<i>Modelo analítico e numérico para laminados de matriz cimentícia e fibras sintéticas</i>	115
7.4	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade — Center-Cracked Tension (CCT)</i>	123
7.5	<i>Modelo – Argamassa reforçada com fibras de carbono</i>	130
7.5.1	<i>Modelo numérico de dano (análise não linear)</i>	130
7.5.2	<i>Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão (análise linear)</i>	133
7.5.3	<i>Modelo termomecânico para determinação fator de intensidade de tensão,</i>	

	<i>CMOD e temperatura (análise linear).....</i>	<i>135</i>
7.6	Modelo termomecânico para laminado com fibras sintéticas.....	142
7.6.1	<i>Modelo para determinação da tensão residual de laminado de matriz cimentícia e fibra de carbono</i>	<i>145</i>
8	CONCLUSÕES	156
9.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	159
REFERÊNCIAS	160
APÊNDICE	171

1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material compósito amplamente utilizado na construção civil devido às suas propriedades mecânicas, possuindo diversas aplicações estruturais e inúmeras vantagens pela sua resistência à compressão e durabilidade. Porém, dentro de suas desvantagens possui baixo módulo de elasticidade, baixa resistência à tração e baixa tenacidade à fratura (BARBERO, 2017). É classificado como material quase frágil por causa de uma zona de processo de fratura antes da ponta real da trinca (SHAH, 1955).

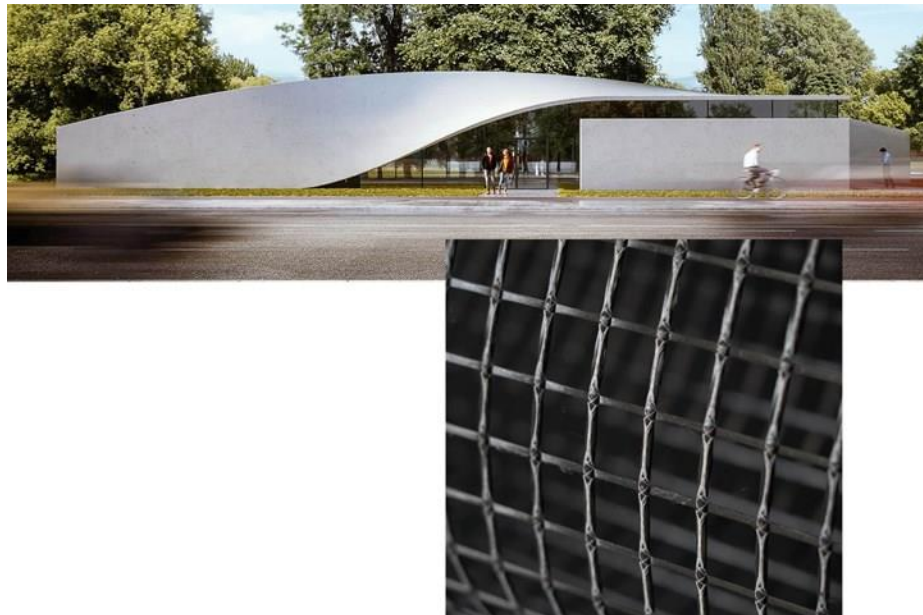
Atualmente, a principal forma de reforço mecânico do concreto é através da adição de armaduras de aço (fios ou barras de aço) inseridos no concreto para melhorar sua resistência à tração e flexão. Essa forma de reforço é amplamente utilizada na construção de estruturas de concreto armado, como paredes, vigas, lajes, pilares, entre outras.

Com o avanço no campo da engenharia e ciência dos materiais, diversas pesquisas têm surgido com o intuito de melhorar as propriedades do concreto e das argamassas. O uso de fibras no concreto permite que seja obtida uma estrutura resistente e de alta durabilidade, com custos menores e, que, além disso, tenha maior resistência às tensões de impacto, às fissuras, aos choques térmicos e à corrosão. As fibras também são mais leves que as armaduras de aço, o que diminui o peso e facilita a instalação. Essas fibras podem ser inseridas à matriz em diferentes formas, podem-se ser inseridas de forma curta — onde nesse caso o comprimento da fibra, fração mássica e a orientação influenciam diretamente na resistência mecânica — ou de forma longa, onde a orientação e o número de camadas são fundamentais para a obtenção da resistência mecânica. Além disso, pode haver combinações de tipos de fibras-compósito híbrido. Dentre as fibras mais estudadas, destacam-se: vidro, carbono, aço e polímero (BAUER, VASCONCELOS; GRANATO, 2007).

Dentre elas, destaca-se a fibra de carbono que possui elevada resistência mecânica e leve. Isso significa que pode ser usada para aumentar a resistência do concreto sem aumentar o peso substancialmente, útil em construções que necessitam de resistência extrema e máxima durabilidade. A literatura indica um grande potencial de uso de fibras de carbono no concreto, pois aumentam a resistência mecânica, tenacidade à fratura e dificultam a propagação de trincas (LIU; JIANHUA, *et al.*, 2020; BERNARDI; ELENA, *et al.*, 2017). As fibras de carbono têm as seguintes propriedades: peso leve, resistência a altas temperaturas, resistência à corrosão, alta resistência mecânica. Portanto, essas fibras têm grande potencial para substituir o aço em estruturas de concreto (SAFIUDDIN; YAKHLAF; SOUDK, 2018).

As fibras de carbono já estão sendo empregadas na construção de edificações, como pode ser visto na Figura 1, uma edificação totalmente de concreto reforçado com fibras de carbono na Alemanha. A TU Dresden afirma que o edifício de 220 metros quadrados e dois andares será o primeiro edifício do mundo feito inteiramente de concreto reforçado com fibra de carbono. Segundo a matéria disponível pela *composite word*, com o título: “*Carbon fiber-reinforced concrete accelerates in Germany*”, o concreto reforçado com fibra de carbono visa reduzir o uso de material de concreto em 50% e as emissões de CO₂ em até 70%.

Figura 1 Primeiro edifício do mundo feito inteiramente de concreto reforçado com fibra de carbono (finalizado em 2023)



Fonte: *Rendering of CUBE building at TU Dresden and Hitexbau carbon fiber grid*. IuriiVakaliuk, HENN, TU Dresden and Hitexbau. <https://www.compositesworld.com/news/carbon-fiber-reinforced-concrete-accelerates-in-germany> acessado em 10/01/2024

Estudos como de Safiuddin *et al.* (2018) mostram o potencial dessa fibra. Nos estudos em que usaram concretos com fibras de carbono, na forma curta, variando de 0% a 1%, observaram um aumento significativo na resistência à tração, e observaram um aumento significativo na resistência à flexão e tenacidade à fratura de até 0,25 % da fração volumétrica das fibras de carbono. No entanto, a resistência à compressão diminui com o aumento da concentração de fibra.

Entretanto, o uso de fibras curtas tem um limitador, que é a concentração da fibra, pois mesmo uma alta fração volumétrica de fibras cria vários pontos de contato da fibra com a matriz que facilitam a propagação da trinca, além da dificuldade de distribuição da fibra na matriz

durante o processo de fabricação (SAFIUDDIN; YAKHLAF; SOUDK, 2018; KIMM; DAVIDE; THOMAS, 2020; LUI; TAO; YANG, 2019).

Em contrapartida, compósitos estruturais como os laminados se destacam por apresentarem configurações e propriedades mecânicas variadas e maior controle de propriedades. Um laminado é construído empilhando várias lâminas na direção da espessura. Essas lâminas são constituídas de fibras contínuas alinhadas. Exemplos de tipos de laminados, como laminado unidirecional, laminado *angle-ply*, laminado *Cross-ply*, laminado simétrico, laminado antissimétrico, laminado assimétrico e laminado *quase* isotrópico. A configuração do laminado influencia na resposta mecânica do compósito (LEVY NETO; PARDINI, 2006).

Com a finalidade de obter melhores propriedades mecânicas em compósitos, vários tipos de pesquisas são realizadas com laminados de polímeros e fibras sintéticas (DONG, 2020). No entanto, laminados de matriz cimentícia ainda são pouco estudados. As fibras são geralmente usadas em laminados para reforçar elementos estruturais — laminados de polímero reforçado com fibra de carbono (CFRP) (SANGI; DEHESTANI, 2020; KURNIAWAN; KASYANTO; MAULUDIN, 2021). Nesse tipo combinação, deve-se levar em consideração a interação química entre o laminado e o concreto.

O processo de fabricação do material de laminado gera pequenos defeitos que podem variar de bolhas de ar a microfissuras. A mecânica da fratura visa estudar esses defeitos nos materiais, visto que são amplificadores de tensão que podem causar a falha catastrófica do material a partir de um determinado tamanho de trinca. A inserção de furos e descontinuidades estruturais nos materiais aumentam o estado de tensão naquela região (ANDERSON, 2017). Este nível de tensão provoca o início da propagação da falha.

Os materiais podem ser projetados usando os parâmetros da mecânica da fratura. Griffith (1920) foi o primeiro a estudar a fratura propondo o critério de energia. Porém, o estudo desenvolvido por Irwin (IRWIN, 1956), que foi o responsável pelo desenvolvimento da versão atual que considera a taxa de liberação de energia, G , que é definida como a taxa de variação da energia potencial com uma área de fissura para um material elástico linear. No momento da fratura, $G = G_c$, a taxa crítica de liberação de energia, que é uma medida da tenacidade à fratura. De acordo com estudos, a falha ocorre quando $KI = KI_C$, KI refere-se ao fator de intensidade de tensão no modo I. A respeito desse fator, KI é a força motriz para a fratura do material e KI_C é uma medida da resistência do material à falha. Como com G_c , a propriedade de similitude deve se aplicar a KI_C . Em outras palavras, KI_C é assumido como uma propriedade do material independentemente do tamanho (ANDERSON, 2017).

O fator de intensidade de tensão — *Stress Intensity Factor* (SIF) é uma medida da

intensidade do campo de tensão perto da ponta de uma trinca. É usado para quantificar a severidade do campo de tensão e para determinar se ele é grande o suficiente para causar falha do material. O SIF não está diretamente relacionado à “tensão” na ponta da trinca, mas está relacionado ao tamanho, forma e orientação da trinca (ANDERSON, 2017). Sendo assim, é um parâmetro amplamente aceito para determinar a resistência do material à propagação de trincas sob carregamento externo. A avaliação da tenacidade à fratura do concreto quanto ao fator de intensidade de tensão tem sido estudada por diversos autores (KHITAB; AHMAD *et al.*, 2017; REIS; FERREIRA, 2004).

A falha do material pode acontecer de várias maneiras. Em material compósito laminado dentro dos três tipos classificados na mecânica da fratura: modo I, em que a propagação da trinca ocorre em condições normais de carregamento no plano, onde a trinca se propaga perpendicularmente à aplicação do carregamento. O Modo II, onde a carga aplicada é transversal ao comprimento da fissura, também conhecido como cisalhamento. Fratura Modo III é o tipo de falha em que a carga aplicada é paralela ao comprimento da trinca. O modo I da mecânica da fratura é considerado o mais perigoso (BOUIADJRA; BELHOUARI; SERIER, 2002). Além disso, em vários problemas, a propagação da trinca começa no modo misto e continua no modo I (BOUIADJRA; BELHOUARI; SERIER, 2002; SHI, 2020; SHI, 2009; PEREZ, 2017).

A mecânica da fratura diz respeito ao projeto e à análise de estruturas que contêm trincas ou falhas. Em alguma escala de tamanho, todos os materiais têm falhas microscópicas, devido a inclusões de trincas, fibras descoladas etc.; ou macroscópicas, devido à corrosão, fadiga, falhas de soldagem etc. (PEREZ, 2017). A mecânica da fratura pode ser elástica linear ou não linear. O primeiro se aplica a materiais que apresentam ruptura frágil, enquanto o segundo considera a área de processos inelásticos. A mecânica de fratura elástica linear (MFEL) também é usada quando os efeitos de dissipação de energia associados à zona de processo inelástica são pequenos o suficiente para serem desprezados. No caso ideal do MFEL, a zona de processo é composta por um único ponto, ou seja, a ponta da trinca.

Portanto, grandes zonas de processo geralmente requerem modelos não lineares de mecânica de fratura. Muitos pesquisadores usam esses conceitos para determinar o fator de intensidade de tensão (BAUER; VASCONCELOS; GRANATO, 2007). Vários métodos são usados para determinar o fator de intensidade de tensão, sendo os mais comuns os experimentais e analíticos.

Pesquisadores como Marques *et al.* (2010) calcularam o fator de intensidade de tensão (KI) do concreto usando métodos analíticos e experimentais (usando corpos de prova de viga

entalhada de aresta única — SENB, obtendo resultados satisfatórios. Os autores compararam os resultados obtidos pelos dois métodos e concluíram que a tenacidade à fratura do concreto depende do tamanho do agregado, mas não de forma linear. Eles também observaram que o método experimental produziu valores mais altos de tenacidade à fratura do que o método analítico.

Carpinteri *et al.* (2010) estudaram o comportamento à fratura de CRF (concreto reforçado com fibras) com polipropileno microssintético fibrilado. A tenacidade à fratura Modo I foi calculada usando métodos experimentais e analíticos. Observou-se que há um aumento da tenacidade à fratura com o aumento da fração volumétrica das fibras.

Chari (2014) estudou o comportamento mecânico do concreto armado com fibras de aço e aplicou a Mecânica da Fratura Elástica Linear (LEFM). Nesse estudo foram determinados o módulo de elasticidade, fator de intensidade de tensão e energia de fratura tanto numericamente quanto experimentalmente. Descobriu-se que as fibras de aço aumentam essas propriedades mecânicas. Observou-se também que as tensões de falha (tensões normais e de cisalhamento) diminuem com o aumento do tamanho das vigas, o fator de intensidade de tensão aumenta com o aumento do tamanho das vigas para todas as classes de concreto e a energia de fratura aumenta com o aumento do tamanho das vigas para todas as vigas.

Chauhan *et al.* (2018) aplicaram a mecânica da fratura linear para calcular o fator de tensão do concreto usando Abaqus / CAE. Foi observado que o o fator de intensidade de tensão-*stress intensity factor* (SIF) aumenta com a diminuição do tamanho da amostra. Além disso, o SIF aumenta com o aumento da proporção na razão entalhe para profundidade.

Devido ao avanço computacional, já é possível obter o comportamento da fratura dos materiais através do método dos elementos finitos, principalmente utilizando a mecânica da fratura. Os métodos numéricos mais usados para problemas de mecânica da fratura são: método dos elementos finitos (FEM) (ZIEBA; BUDA-OZOG; SKRZYPCZAK, 2020; ZÁRATE; CORNEJO; OÑATE, 2018; GAWIL, 2016), método dos elementos de fronteira (BEM) (NIKBIN; FARSHAMIZADEH *et al.*, 2020), método dos elementos finitos estendidos (XFEM) (FARON; ROMBACH, 2020; HUANG *et al.*, 2018; DIMITRI *et al.*, 2017), métodos sem malha (RAJAGOPAL; GUPTA, 2011), método de elementos finitos de contorno escalonado (SBFEM) (LI *et al.*, 2018; KHAJI; YAZDANI, 2016) e método de fragmentação de malha (RAEISI *et la.*, 2021). Os métodos fornecem alta precisão do fator de intensidade de tensão na ponta da trinca, mas para isso há necessidade de adequações ao modelo devido à singularidade do campo de tensão na ponta da trinca (BOUIADJRA; BELHOUARI; SERIER, 2002; GAWIL, 2016).

A aplicação de elementos finitos em compósitos tem sido investigada por vários autores, como Ramesh e Nijanthan (2016), que estudaram a análise das propriedades mecânicas de kenaf – compósitos poliméricos reforçados com fibra de vidro com duas orientações de fibra diferentes de 0° e 90° (onde 90° as fibras estão alinhadas em direção ao carregamento e 0° as fibras estão perpendicular a direção do carregamento).. Resultados experimentais mostraram que compósitos com orientação de 90° apresentam maior resistência à tração e tensão de impacto do que compósitos com fibras orientadas a 0° . A maior resistência à flexão foi para o compósito de 0° . Em relação ao modelo FEA, os resultados estão muito próximos dos valores experimentais.

Em outro estudo, Ramesh *et al.* (2019) analisaram os compósitos híbridos reforçados com fibras de linho-vidro com duas orientações diferentes de fibras de 0° e 90° experimentalmente e pelo método dos elementos finitos (onde 0° é carregamento na direção das fibras e a 90° em relação ao carregamento). Os resultados mostram que compósitos com orientação 0° apresentaram maiores valores de resistência à tração, flexão e impacto em relação aos compósitos com 90° .

Em outra pesquisa, Ramesh *et al.* (2018) analisaram o efeito da hibridização nas propriedades mecânicas de compósitos poliméricos reforçados com fibra de carbono e cânhamo, fazendo uma comparação entre testes experimentais e FEM. Os valores obtidos no programa computacional ANSYS foram comparados com os resultados experimentais. Existe uma alta correlação entre a fibra de carbono tratada com álcali e a não tratada e os compostos de cânhamo.

Embora o método dos elementos finitos seja aplicado a diversos problemas da mecânica da fratura, os elementos geralmente utilizados não geram precisão adequada na ponta da trinca. Este método requer malhas densas na região próxima à ponta da trinca. Isso torna o sistema algébrico de equações muito grande. O aumento do número de elementos nessas regiões aumenta o esforço computacional para resolver o problema. Para resolver este problema, pesquisadores como Henshel e Shaw (1975) desenvolveram elementos de quarto de ponto singulares (ou elementos de ponta da trinca) fazendo algumas mudanças na formulação de elementos regulares. Outro procedimento comumente usado em aplicações da mecânica de fratura com o uso do método dos elementos finitos é ignorar a presença de singularidade e refinar a malha nas proximidades da ponta da trinca para reduzir seu efeito (BLANDFORD *et al.*, 1981). O valor numérico dos componentes de tensão calculados na ponta da trinca sempre será finito, mas pode ser tão grande quanto desejado, aumentando o refinamento da malha (SANTANA, 2015). Dessa forma, o FEM pode resolver problemas de mecânica de fratura de

estruturas complexas e massivas, salvaguardadas as suas adequações

Outro método que vem crescendo é o dos elementos finitos estendidos — *Extended finite element method* (XFEM), usado para avaliar descontinuidades de compósitos e para análises da integridade estrutural. Isso é devido à capacidade do XFEM de replicar fraturas virtuais sem — e/ou com — re-malhamento mínimo. Isso tem duas vantagens claras: uma redução do custo computacional em relação ao FEM clássico. Isso é crítico ao lidar com a simulação de componentes de engenharia complexos e sujeitos a falhas. Introdução da descontinuidade associada a trincas, delaminação, etc. direto por meio de graus de liberdade adicionais nos chamados nós enriquecidos. Isso fornece uma visão mais realista com relação ao cálculo do salto em tensão, deformação e variáveis internas se for para ser comparado com FEMs, incluindo relações constitutivas de materiais baseadas apenas na mecânica de dano contínuo (CURIEL-SOSA, 2015; LATEEF, 2021; TAWFIK, 2021)

Com relação ao entendimento do efeito térmico nos materiais compósitos, o tipo de material a ser introduzido à matriz muda consideravelmente as características mecânicas, térmicas, durabilidade e segurança dos compósitos (LUBLOY, 2020). Situações extremas, como mudança de temperaturas, incêndio e climas com baixas temperaturas modificam como o material irá se comportar, seja como expansão ou contração (LUBLOY, 2020; YAN; XIE, 2017).

Ainda existem poucos estudos sobre tensão residual em laminados de concreto provocada pela variação de temperatura. Os trabalhos mais recentes são sobre situações de incêndio, como é possível observar nos estudos de Abdulrahman e Kadir (2022), no qual usaram concreto com laminados de fibra de carbono. Os resultados mostraram que o reforço com laminados de carbono aumentou significativamente a resistência à flexão e a resistência à compressão das vigas danificadas por fogo. Além disso, verificou-se que o aumento da temperatura e o tempo de exposição ao fogo causam reduções significativas na resistência à flexão e à compressão das vigas.

Messori *et al.*, (2019) estudaram o efeito da exposição à alta temperatura em compósitos de argamassa reforçada com tecido de vidro revestido com epóxi. Verificou-se que, na faixa de temperatura explorada, a degradação é surpreendentemente suave e fortemente dependente da resina que é tomada como agente de revestimento. Na verdade, a exposição à temperatura pode levar ao aumento da força.

Péron *et al.*, (2017) estudaram um novo modelo para a previsão de tensões induzidas pelo processo durante o resfriamento de compósitos termoplásticos. É baseado na teoria *Classical lamination theory* (CLT) modificada e leva em consideração o desenvolvimento das

propriedades mecânicas dos compósitos. Notou-se que a sequência de camadas tem um papel importante na intensidade das tensões residuais, mais do que a fração de volume da fibra ou taxa de resfriamento, cujos efeitos parecem mais insignificantes.

Com relação à análise numérica, ainda existem poucos estudos relacionando as teorias de laminados com métodos numéricos. Dentre os métodos numéricos, pode-se destacar os estudos de Bellini *et al.*, (2021) no qual desenvolveram um modelo numérico para a determinação de tensões residuais de laminados de fibra de metal e validado através de ensaios experimentais. O estudo de caso foi um laminado entalhado, a fim de enfatizar a deformação sem alterar o ciclo térmico vivenciado no material. Tanto os resultados numéricos quanto os experimentais destacaram uma deformação mais alta perto do vértice do laminado.

Ghasemi e Mohammadi (2016) também realizaram pesquisas sobre a tensão residual em compósitos usando análise numérica. No trabalho em questão foram usadas fibra de carbono, nanotubos de carbono e matriz polimérica. As tensões residuais radial e tangencial foram determinadas em diferentes direções por análise de elementos finitos usando o software comercial ABAQUS para cada fase individualmente. Os resultados mostram que os arranjos de células unitárias 3×3 são adequados para modelar tensões residuais micro e os resultados deste arranjo são confiáveis.

1.1 Justificativa

Conforme visto anteriormente, as fibras de carbono tem grande potencial para criação de materiais para construção de edificações. Entretanto, isso gera mais estudos sobre o tema, tanto sob o aspecto mecânico desse material como térmico ou termomecânico. Logo, a criação de laminados é um ponto chave na criação e desenvolvimento de novos materiais para construção civil e sua avaliação sob esses aspectos é relevante, além de questões ambientais.

Diante desse cenário, o presente trabalho segue duas frentes no estudo de compósitos de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono: a mecânica e a térmica. Ambas são de fundamental importância para a manutenção da integridade de um material. O aparecimento de uma trinca pode ocasionar uma falha catastrófica e, com relação à questão térmica, pode causar tensões residuais que podem ser um nucleador da falha.

Com relação à frente mecânica, pode-se destacar poucos estudos (teóricos, experimentais e numéricos) sobre laminados de concreto com fibra de carbono na determinação do fator de intensidade de tensão. A maior parte das pesquisas concentram-se em fibras de aço, fibras curtas poliméricas e fibras naturais. Além disso, constata-se que há poucos estudos

envolvendo mecânica da fratura sobre esses materiais, por se tratar de um problema complexo, devido à singularidade do campo de tensão na ponta da trinca e parâmetros desafiadores na fórmula teórica que é difícil de ser determinada por experimentos; torna-se fundamental esse estudo para entendimento de compósitos de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono usando o FEM, comparando com XFEM.

Com relação à frente térmica, notou-se poucos estudos sobre modelos computacionais de compósitos de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono. Um caso de tensão residual é causado pela heterogeneidade do material, logo, por haver poucos estudos sobre essa combinação concreto laminado com fibra de carbono torna-se relevante essa pesquisa. Há muitas complexidades e dificuldades no uso de algumas das técnicas experimentais para a medição de tensões residuais em compósitos e mais pesquisas também são necessárias para eliminar esses obstáculos. Nesse caso, o uso de elementos finitos pode ajudar a entender esse aspecto. Além disso, há muitas perguntas sem resposta na modelagem matemática de tensões residuais que precisam ser esclarecidas por mais pesquisas.

A variação de temperatura gera tensão residual em diferentes materiais, incluindo compósitos de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono. A adição de fibras de carbono na criação de laminado de concreto pode minimizar os efeitos da tensão residual gerada pela variação de temperatura. Entretanto, a orientação dessas fibras alinhadas deve ser estudada devido à falta de estudos sobre o tema. É necessário aprofundar sobre o perfil de tensão nesses materiais.

Ressalta-se que a maior parte das pesquisas concentram-se em situações de incêndio/altas temperaturas de concreto, como: concreto armado com fibras de aço, concreto reforçado com fibras curtas de carbono e fibras naturais.

Dessa forma, o estudo sobre as fibras de carbono aos laminados de concreto torna-se relevante tanto na parte mecânica como térmica.

1.2 Objetivos da pesquisa

1.2.1 Objetivo Geral

Determinar o fator de intensidade de tensão(K) e tensão residual de materiais laminados de matriz cimentícia e fibras de carbono através de método de elementos finitos e métodos analíticos.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Avaliar o comportamento mecânico dos compósitos na presença de entalhe usando método dos elementos finitos;
- Criar e avaliar o modelo numérico de dano do concreto usando FEM e XFEM e para determinação do fator de intensidade de tensão;
- Criar laminados de concreto reforçado com fibras de carbono e analisar efeito da orientação das fibras no fator de intensidade de tensão;
- Avaliar a utilização do FEM para determinação do fator de intensidade de tensão para laminados concreto/fibra de carbono — estudo da mecânica da fratura linear elástica — comparando com o modelo analítico de compósitos estruturais;
- Avaliar a utilização do FEM comparando com XFEM para determinação do fator de intensidade de tensão para laminados concreto/fibra de carbono;
- Criar e avaliar modelo numérico termomecânico desacoplado de compósito de matriz cimentícia reforçado com fibras de carbono para análise de dano e fator de intensidade de tensão;
- Criar e avaliar modelo numérico termomecânico acoplado de compósito laminado para determinação de tensão residual;
- Analisar o perfil de tensão em cada configuração do laminado;
- Criar um programa para análise da tensão residual de laminados;
- Analisar a tensão residual dos laminados em diferentes temperaturas.

1.3 Estrutura do Trabalho

Esta tese está organizada em 9 capítulos de acordo com a sequência a seguir:

O Capítulo 1 é a introdução da tese, que mostra a relevância do tema no meio científico, justificativa, objetivos geral e específicos;

O Capítulo 2 refere-se à revisão bibliográfica a respeito de materiais compósitos, conceituando os principais assuntos sobre lâmina, regra da mistura, métodos analíticos para laminados, compósitos cimentícios e fibras sintéticas, além de materiais cimentícios reforçados com fibras;

O Capítulo 3 trata da tenacidade à fratura dos materiais, principalmente da Equação de Griffith, modos de sollicitação e por fim sobre o fator de intensidade de tensão. Esse Capítulo mostra os conceitos relacionados à mecânica da fratura, como a mecânica da fratura elástico-linear, elastoplástica. Além disso, é abordado sobre como as fibras influenciam no fator de intensidade de tensão nos materiais;

O Capítulo 4 está relacionado ao método dos elementos finitos. Primeiramente, é explicado sobre FEM e depois XFEM que são métodos empregados em análise numérica computacional;

O Capítulo 5 trata da tensão residual em materiais compósitos. Esse capítulo mostra os conceitos a respeito do desenvolvimento da tensão residual em laminados;

O Capítulo 6 mostra os materiais e métodos empregados no estudo. Os métodos analítico e numérico foram usados para determinar o fator de intensidade de tensão;

No Capítulo 7 são apresentados os resultados e discussões da pesquisa;

No Capítulo 8 são apresentados as conclusões da pesquisa.

No Capítulo 9 são apresentados as sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS ESTRUTURAIS

Este capítulo apresenta o que é um material compósito, um laminado e a regra das misturas — *Rule of mixtures* (ROM). Além disso, são apresentados os métodos analíticos para determinação das propriedades mecânicas de laminados. No final desse capítulo são apresentados os materiais cimentícios.

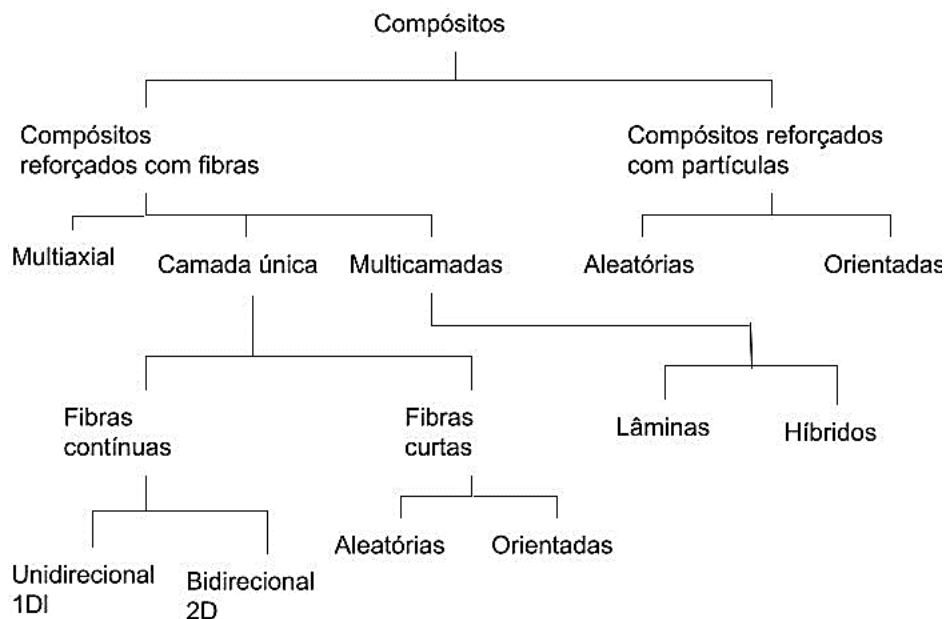
2.1 Materiais Compósitos

Um material compósito é produzido pela combinação de dois ou mais materiais que possuem propriedades muito distintas. O objetivo de projetar um material compósito é atingir uma combinação de propriedades que não é exibida por qualquer material isolado. Estes compósitos podem ser classificados de acordo com a matriz e pelo tipo de fibra ou partículas usadas.

De modo geral, alguns materiais compósitos caracterizam-se por serem bifásicos constituídos por duas fases; uma denominada matriz, que envolve a segunda fase, geralmente denominada fase dispersa. As propriedades do compósito obtidas são em função das propriedades de cada fase, da quantidade relativa de cada fase e da geometria da fase dispersa (sua forma, tamanho, distribuição e a orientação das partículas). Vários tipos de compósitos são classificados em: reforçado com partículas, reforçado com fibras e compósito estrutural (LEVY NETO; PARDINI, 2006). A Classificação destes compósitos pode ser vista na Figura 2.

Os compósitos reforçados com fibras subdividem-se em: monocamada e multicamadas. Dentro desta classificação podemos ter os com fibras contínuas e descontínuas. Com relação à orientação das fibras, elas podem ser unidirecionais ou aleatórias (LEVY NETO; PARDINI, 2006).

Figura 2 Classificação hierárquica de compósitos sintéticos e naturais

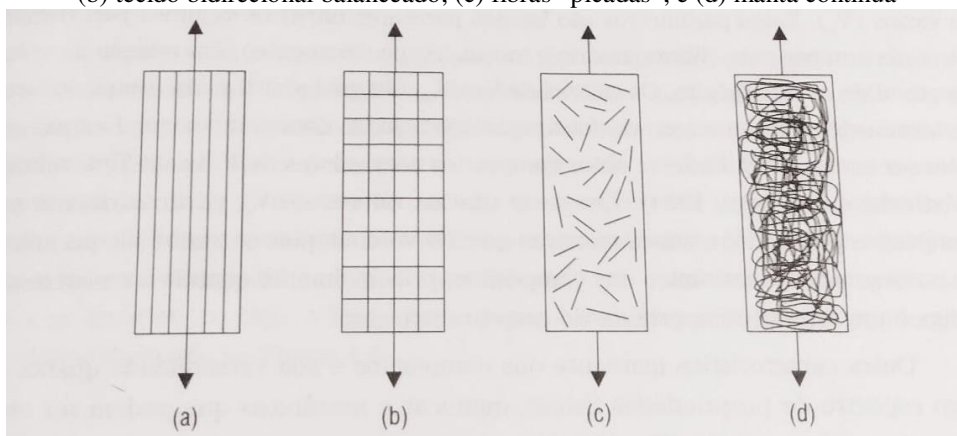


Fonte: Pardi e Neto, 2006

2.2 Lâmina

As propriedades elásticas dos materiais são características mecânicas essenciais para a análise de tensões e o projeto de componentes estruturais usados em diversos ramos da engenharia. No caso da lâmina, ela é constituída por uma matriz, que é reforçada, em escala macroscópica, por uma ou mais fibras. Essa fibras podem estar em diferentes configurações em uma lâmina, como pode ser visto na Figura 3.

Figura 3 Lâminas submetidas à esforços de tração uniaxial longitudinais com reforço do tipo (a) unidirecional; (b) tecido bidirecional balanceado; (c) fibras “picadas”; e (d) manta contínua



Fonte: Pardini e Neto, 2016.

Em uma lâmina de compósito, o volume (v) total do material(v_t) divide-se em 3 parcelas, ou seja: (i) o volume de fibras(v_f);(ii) o volume de matriz (v_m); e (iii) o volume de vazios (v_v). O volume de vazios corresponde ao volume de bolhas de ar e outros. Pode ser expresso como na equação (1):

$$v_t = v_f + v_m + v_v \quad (1)$$

A partir dessa expressão, pode-se definir as frações volumétricas (V) de fibras (V_F), de matriz (V_M), De vazios (V_V), respectivamente, são:

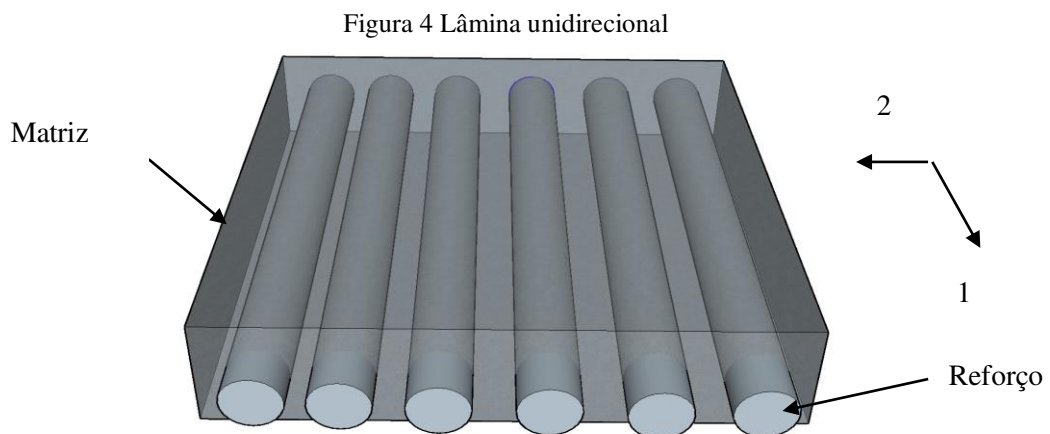
$$V_F = \frac{v_f}{v_t}; V_M = \frac{v_m}{v_t}; V_V = \frac{v_v}{v_t} \quad (2)$$

Através da combinação obtemos:

$$V_F + V_M + V_V = 1 \quad (3)$$

2.2.1 Regra das misturas (ROM)

Regra das misturas – *Rule of mixture* (ROM), é um dos vários modelos micromecânicos para prever propriedades mecânicas de lâminas contínuas reforçadas com fibra. A Figura 4 mostra um modelo esquemático de uma lâmina unidirecional, com os eixos 1 e 2 no plano, referentes à direção longitudinal e transversal. A equação (4) mostra a determinação do módulo longitudinal para um compósito unidirecional. Onde E_f e E_m representam o módulo de elasticidade efetivo da fibra e matriz, respectivamente, e V_F é a fração de volume da fibra.



Fonte: Autor

$$E_1 = E_f V_f + E_m(1 - V_f) \quad (4)$$

A Equação (4) é validada entre algumas premissas: a ligação entre as fibras e a matriz é perfeita; os módulos elásticos, diâmetros e espaço entre as fibras são uniformes; as fibras são contínuas e paralelas; as fibras e a matriz seguem a lei de Hooke (linearmente elástica); as fibras possuem resistência uniforme e o compósito é isento de vazios (KAW, 2006).

2.3 Métodos Analíticos para Laminados

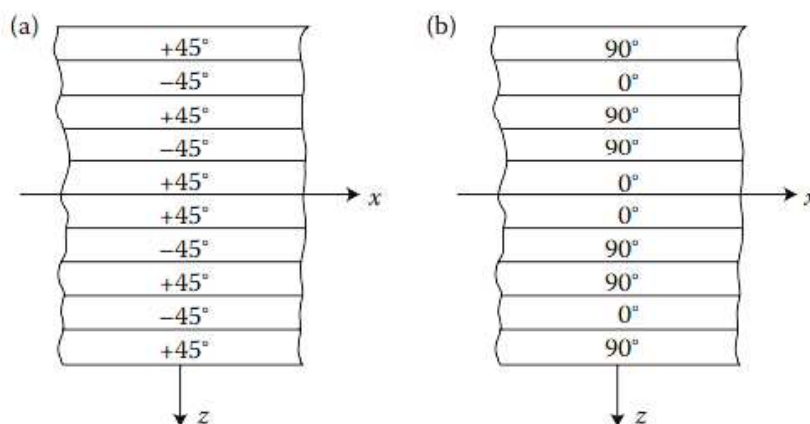
A teoria de rede (*netting theory*) é um dos métodos usados para análise de laminados. Segundo a teoria, as forças externas serão transmitidas através da matriz, sendo que a matriz evita a flambagem das lâminas quando submetidas à compressão. As equações de equilíbrio determinam as forças individuais nas camadas (KUNSTSTO, 2006).

2.3.1 Tipos de configurações de laminados

Laminado simétrico

Um laminado simétrico tem simetria de propriedade geométrica e de material sobre a superfície intermediária. Ou seja, o material, a orientação e a espessura da camada a uma distância positiva z da superfície intermediária são idênticos aos valores correspondentes a uma distância negativa igual z da superfície intermediária (GIBSON, 2016). Exemplos de laminados de *Symmetric angle-ply* e *cross-ply* são mostrados na Figura 5a e b, respectivamente.

Figura 5 Exemplos de laminados simétricos. As orientações da camada e as propriedades do material são simétricas sobre a superfície média. (a) *Symmetric angle-ply* e (b) *symmetric cross-ply*

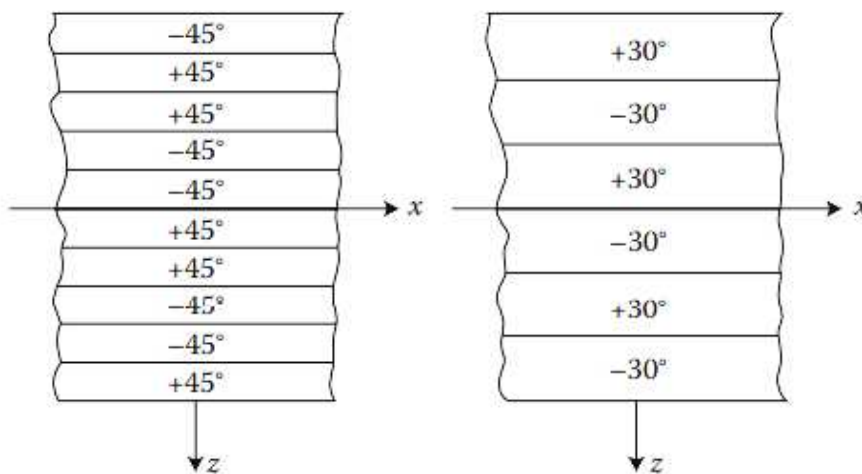


Fonte: Gibson (2016)

Laminados Antissimétricos

Um laminado assimétrico (Figura 6) tem camadas de material e espessura idênticos em distâncias positivas e negativas iguais da superfície intermediária, mas as orientações das camadas são antissimétricas em relação à superfície intermediária (GIBSON, 2016).

Figura 6 Exemplos de laminados assimétricos angle-ply. Embora as orientações das camadas sejam antissimétricas sobre a superfície média, a distribuição do material é simétrica

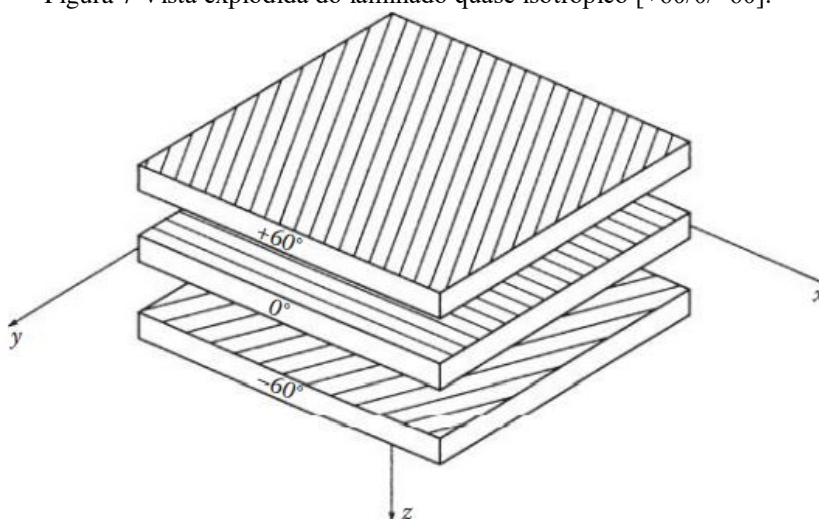


Fonte: Gibson (2016)

Laminados Quasi-Isotropic

Embora possa parecer improvável, é possível usar lâminas ortotrópicas para construir um laminado que exiba alguns elementos de comportamento isotrópico (GIBSON, 2016). Um exemplo desse tipo de laminado está representado na Figura 7.

Figura 7 Vista explodida do laminado quase isotrópico [+60/0/-60].

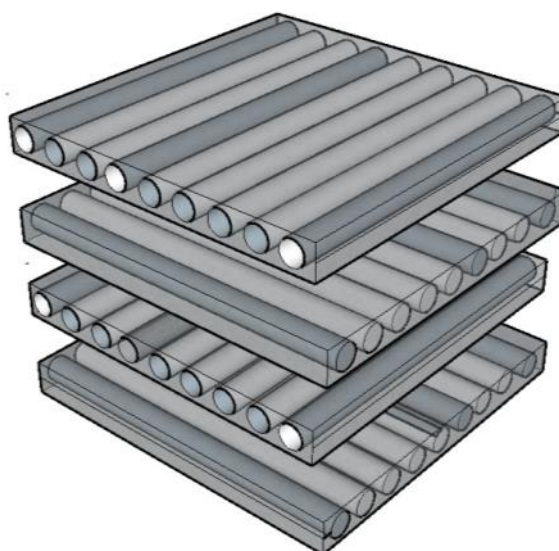


Fonte: Gibson (2016)

2.3.2 Teoria Clássica do Laminado — Classical Lamination Theory (CLT)

A teoria clássica do laminado é utilizada para análise de um laminado cujo objetivo é calcular as tensões dentro de cada camada. Encontra-se as tensões em cada camada levando em consideração a resposta elástica do laminado. Logo, ele representa uma paralelização do comportamento elástico das fibras individuais de cada camada. Através das deformações em termos globais, calcula-se a tensão em camadas do laminado individualmente. A tensão é obtida no sistema de coordenada global (x-y), onde é realizada a análise de forças (SCHRANZINGER, 2014). A Figura 8 mostra um exemplo de um laminado.

Figura 8 Exemplo de configuração de um laminado



Fonte: Autor.

Esses componentes devem ser transformados para o sistema local de coordenadas 1-2. A direção 1 do sistema representa a direção longitudinal, enquanto a direção 2 representa a direção transversal levando como referência a fibra. O CLT utiliza-se da combinação das teorias da membrana 2D e elementos da placa (GIBSON, 2016).

Em uma única lâmina que apresenta comportamento transversal de material isotrópico, um estado de tensão uniaxial não ocasionará tensão de cisalhamento. Logo, as tensões normais não implicam em deformação por cisalhamento. Porém, em um compósito laminado que apresenta várias lâminas empilhadas, com diferentes orientações, pode apresentar o seguinte fenômeno: a tensão normal na direção x do compósito laminado pode duplicar ou triplicar. Uma formulação matemática da teoria combinada utiliza-se de um acoplamento matriz de estabilidade (matriz B) para explicar os efeitos ocorridos. A matriz denominada ABD refere-se

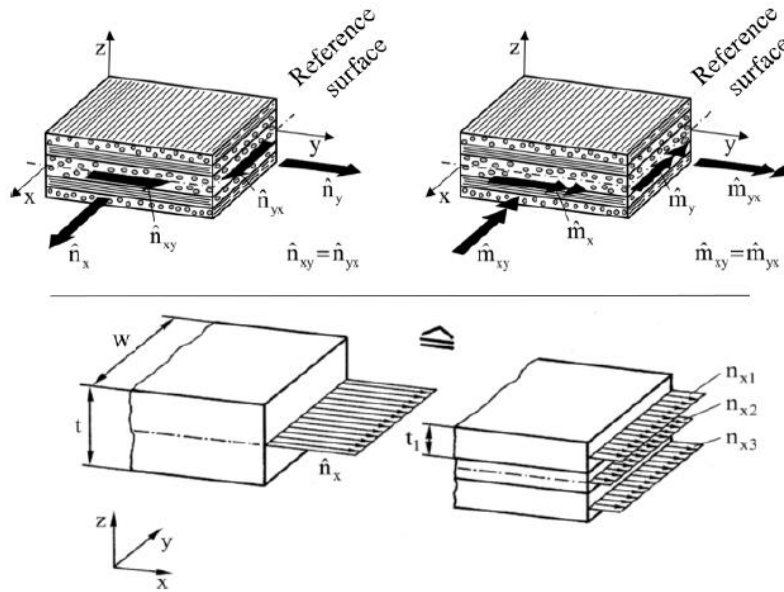
à matriz de estabilidade de todo o laminado. Conforme a teoria clássica do laminado, são feitas as seguintes suposições e definições: fibras e matriz apresentam interação perfeita, as lâminas estão perfeitamente unidas, o laminado consiste em várias camadas empilhadas com característica ortotrópicas ou isotrópicas. O Compósito fibra/matriz é considerado contínuo (NETO; PARDINI, 2006; GIBSON, 2016).

São quatro equações resultantes das forças e equilíbrio que regem a Teoria Clássica do Laminado. Elas são baseadas em relações cinemáticas e constitutivas dessas forças. A formulação cinemática obedece às restrições para a placa: a teoria é aplicada para chapas finas e pequeno deslocamento na direção transversal. Além disso, as seguintes premissas de Kirchhoff se aplicam: seções transversais permanecem planas, o plano intermediário neutro e a seção transversal permanece sem estrias. As normais permanecem perpendiculares à sua superfície de referência (GIBSON, 2016).

Os pressupostos referidos anteriormente limitam o CLT em relação à análise de cisalhamento. Logo, a tensão de cisalhamento dentro da camada não é considerada. Na teoria da deformação por cisalhamento de primeira ordem – *first order shear deformation theory* (FSDT), a cinemática é responsável pela deformação por cisalhamento dentro de camadas individuais. Se a deformação de cisalhamento transversal não puder mais ser negligenciada, o FSDT que leva em consideração a deformação por cisalhamento deve ser empregada (GIBSON, 2016; SCHURMANN, 2007).

Segundo a teoria, a lâmina é considerada um material isotrópico transversalmente, logo, a Lei de Hooke pode ser utilizada para descrever seu comportamento mecânico. Usando as relações de Kirchhoff de deformação, as tensões em uma camada podem ser calculadas usando a matriz de rigidez reduzida. Em vez de tensões atuando em cada camada, é conveniente usar forças e momentos equivalentes agindo na superfície média das camadas individuais. A seção forças/momentos são divididos pela largura do laminado e, portanto, suas unidades são força por unidade de comprimento e momento por unidade de comprimento, respectivamente. Em um laminado, um total de seis forças de seção e momentos podem ser aplicados. Duas forças de seção normal (n_x , n_y), e uma força de cisalhamento (n_{xy}) pode ser sobreposta com dois momentos de flexão (m_x , m_y) e um momento de torção (m_{xy}). A distribuição das forças pode ser integrada para formar as forças totais da seção atuando no laminado $\{\hat{N}\}$ e $\{\hat{M}\}$. O (^) denota os componentes totais somados ao longo da seção, ver Figura 9.

Figura 9 Forças e momentos atuando no laminado (topo). Resultantes de forças no laminado (abaixo)



Fonte: Schurmann (2007)

O “pilar final” do CLT é a equação de equilíbrio. Como de costume para problemas de elasticidade, a peça e qualquer seção arbitrária dela devem estar em equilíbrio.

O procedimento matemático do CLT é realizado em detalhes a seguir. As forças e momentos resultantes são definidos usando as forças totais da seção divididas pelo vão w da placa, equações (5) e (6):

$$\{\hat{n}\} = \frac{\hat{N}}{w} \quad (5)$$

$$\{\hat{m}\} = \frac{\hat{M}}{w} \quad (6)$$

A força de reação e o momento da k -ésima camada são definidos como equação (7) e (8):

$$\{\hat{n}\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k dz \quad (7)$$

$$\{\hat{m}\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k z dz \quad (8)$$

Como mencionado, antes que a matriz de rigidez de todo o laminado possa ser calculada, as matrizes de elasticidade Q para as camadas devem ser determinadas, começando com a Lei de Hooke equação (9):

$$\{\varepsilon_k\} = [S]_k \{\sigma\}_k \quad (9)$$

Onde,

$\{\varepsilon_k\}$ é deformação;

$[S]_k$ é a matriz de flexibilidade;

$\{\sigma\}_k$ tensão.

As relações tensão-deformação para um corpo anisotrópico, onde as conformidades S_{ij} são dadas pela equação (10):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Os números (1,2,3) são usados para definir as direções paralelas ou transversal às fibras usadas como reforço. Para um estado plano de tensão, a matriz de *compliance* para uma lâmina reduz a equação (11).

$$[S]_k = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}_k \quad (11)$$

A matriz de elasticidade $[Q]_k$ é obtida pela inversão da matriz de *compliance* da lâmina (equação (12)). A Matriz $[Q]$ quantifica a rigidez da lâmina, e a matriz $[S]$ a flexibilidade.

$$[Q]_k = [S]_k^{-1} \quad (12)$$

Então, o vetor de tensão bidimensional é calculado da seguinte forma da equação (13):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (13)$$

Onde os Q_{ij} são os componentes da matriz de rigidez da lâmina, que são relacionado às conformidades e às constantes de engenharia. Os termos Q são obtidos por meio das equações: (14), (15), (16) e (17).

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (14)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (15)$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (16)$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \quad (17)$$

Como esse valores de entrada da matriz, a matriz de elasticidade da lâmina deve ser transformada no sistema de coordenadas global utilizando a matriz de transformação $[T]_k$ (equação(18)). O índice k denota uma expressão que pode ser formada para cada lâmina.

$$[T]_k = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)^2 & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)^2 & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}_k \quad (18)$$

O vetor de tensão e deformação pode ser transformado de acordo com as equações (19) e (20):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = [T]_k^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (19)$$

As relações entre as tensões (σ_x, σ_y), cisalhamento no plano τ_{xy} com as deformações normais ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$), deformação angular γ_x são dadas pela equação 20.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [T]_k^{-T} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (20)$$

O inverso e o inverso transposto da matriz de transformação podem ser usados para formar a matriz de rigidez de uma lâmina no sistema de coordenadas global conforme equação (21).

$$[\bar{Q}] = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k^{-T} \quad (21)$$

Onde $[\bar{Q}]$ é matriz de rigidez transformada da lâmina. A relação tensão-deformação pode, portanto, ser escrita conforme a equação (22).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (22)$$

2.3.3 ABD-Matriz

A matriz ABD denota a matriz de rigidez do laminado. Relaciona a tensão global do laminado às cargas de linha que atuam sobre ele. Consiste em três quadrantes distintos equação (23). O Quadrante A, que é o quadrante da membrana, o quadrante D, representando a teoria de placa, e o quadrante B, acoplando essas duas matrizes (GIBSON, 2016).

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ \eta_{xy} \\ mx \\ ny \\ mxy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{21} & B_{21} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{21} & B_{21} & B_{21} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Em suma notação, a equação simplifica para equação (24).

$$\begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Os quadrantes individuais também chamados de submatrizes, podem ser calculados usando as matrizes de rigidez das camadas. Ponderando-os com a distância até a superfície média e adicionando para aumentá-los leva às seguintes expressões (25), (26) e (27). Onde: z_k são as $z_k - z_{k-1}$ coordenadas z, relativas à espessura do laminado, da borda superior e inferior, respectivamente, de cada uma das k camadas do laminado.

$$[A] = \sum [\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (25)$$

$$[B] = 1/2 \sum [\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (26)$$

$$[D] = 1/3 \sum [\bar{Q}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (27)$$

As deformações do laminado são determinadas simplesmente invertendo a equação (28), obtendo assim a equação (28).

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Em alguns casos, a contribuição do cisalhamento transversal deve ser levada em consideração, e então o FSDT deve ser aplicado. A teoria introduz a matriz H que representa a rigidez ao cisalhamento transversal de uma placa. Semelhante às forças e momentos normais,

as forças transversais \hat{V} ou \hat{v} podem ser escritas como equação (29):

$$\begin{Bmatrix} v_y \\ v_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Os componentes da matriz H podem ser obtidos de forma semelhante à Equação pela seguinte expressão (30):

$$H_{ij} = 5/4 \sum [\bar{Q}_{ij}]_k \left(t_k - \frac{4}{t^2} \left(t_k z_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right); i, j = 4, 5 \quad (30)$$

Esses valores de rigidez apresentados devem ser definidos para uma simulação usando o programa computacional ABAQUS se for de casca grossa, elementos são usados e o cisalhamento transversal é calculado; nomenclatura adotada no ABAQUS é *transverse shear stiffness*.

Antes que as tensões e deformações das lâminas individuais possam ser calculadas em termos do sistema de coordenadas local, as tensões da lâmina UD devem ser determinadas no sistema de coordenadas global.

As tensões e deformações dentro das camadas individuais são calculadas começando com tensões globais e curvaturas do laminado. Uma vez que esses valores são conhecidos, as lâminas globais das camadas individuais podem ser calculadas.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x + k_x z_k \\ \varepsilon_y + k_y z_k \\ \gamma_{xy} + k_{xy} z_k \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Com a matriz de elasticidade da k-ésima UD-ply no sistema de coordenadas global equação (22) as tensões podem ser obtidas usando essas deformações.

A última etapa deste procedimento é transformar as tensões globais de cada camada de volta no sistema de coordenadas 1,2 local. Isso pode ser feito facilmente usando a matriz de transformação $([\bar{T}]_k)$ na equação(32).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = [\bar{T}]_k \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (32)$$

As deformações na direção principal(1,2) de uma lâmina são determinadas usando a matriz de *compliance*, assim temos a equação (33)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = [Q]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (33)$$

Com as tensões na direção da fibra, uma análise de tensão pode ser realizada usando um dos critérios de falha. Um critério muito utilizado em lâminas compósitas é o de Tsai-Hill (LEVY NETO e PARDINI, 2006)

2.4 Compósitos cimentícios

O concreto é considerado um material compósito que apresenta partículas macroscópicas cuja matriz é cimentícia — termo da ciência dos materiais. Esse material é versátil devido à sua facilidade de produção, e apresenta boas propriedades mecânicas, no caso compressão, no estado endurecido, por isso é um dos materiais mais utilizados em elementos estruturais.

De acordo com Sobral (2000) e Neville (2016), o concreto é definido como um material resultante da aglomeração de agregados miúdos e graúdos, por uma pasta de cimento eventualmente contendo aditivos, é denominado fresco enquanto a pasta estiver no estado fluido ou plástico que permite sua moldagem e lançamento. Depois de totalmente curado, é chamado de concreto endurecido. O concreto fresco deve ser trabalhável e o concreto endurecido deve ser resistente e durável. A qualidade dos materiais, as proporções em que eles são misturados e a forma como o concreto é manuseado, colocado e curado afetam essas propriedades.

Apesar da boa resistência à compressão, sua baixa resistência à tração faz com que seja necessária a inserção de outros materiais, ou seja, uma combinação. O material mais recorrente é o aço, contudo, com o avanço de pesquisas a respeito da combinação do concreto com novos materiais, atualmente, há vários estudos com fibras de sintéticas inseridas ao concreto (HEYANG WU, 2020).

Mehta e Gerwick consideram as causas físicas de deterioração do concreto em duas categorias: (a) desgaste superficial ou perda de massa devido à abrasão, erosão e cavitação; (b) fissuração devida a gradientes normais de temperatura e umidade, cristalização de sais nos

poros, carregamento estrutural e exposição a temperatura extremas, como congelamento ou fogo (MEHTA e MONTEIRO, 2008).

2.5 Fibras Sintéticas

As fibras são usadas como reforço no material compósito. Os tipos de fibras têm propriedades físicas, químicas e mecânicas diferentes.

O conhecimento das características detalhadas das fibras são importantes para uma simulação computacional mais precisa. Existem vários tipos diferentes de fibras empregadas nas aplicações de hoje como reforço em materiais compósitos, por exemplo:

- Fibras naturais: lã, seda;
- Fibra vegetais: sisal, piaçava;
- Fibras orgânicas: basicamente todas as fibras de plástico (PAN, PE, PP);
- Fibras inorgânicas: vidro, basalto, boro;
- Fibras de metal: aço, alumínio, cobre, tungstênio.

A produção de fibras de carbono esteve com 47.220 toneladas/ano bem menor que a produção de fibra de vidro com 4.330.000 de toneladas/ano (KUNSTSTO, 2014). Ambos experimentam enormes taxas de crescimento e a previsão especialmente para fibras de carbono são notavelmente altas.

2.5.1 Fibras de carbono

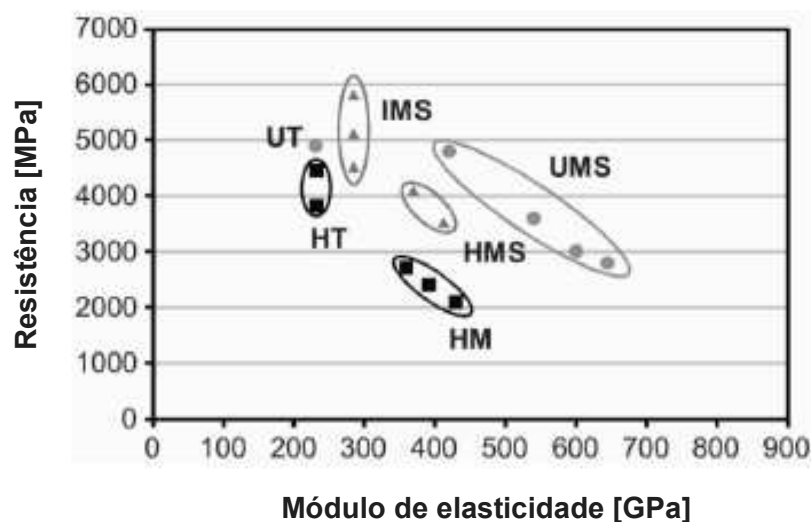
As fibras de carbono como material de alta tecnologia são consideradas uma das principais fibras sintéticas emergentes para o futuro (FORUM, 2014). Possuem propriedades mecânicas superiores à maioria das fibras. São empregadas em diversos ramos da engenharia devido suas propriedades mecânicas elevadas. Atualmente, pesquisadores em todo o mundo estão buscando maneiras mais eficientes e baratas de fabricar produtos de carbono.

O material base para a produção de fibras de carbono são PAN (*Poliacrilnitril*). A alta resistência e alto módulo de Young são alcançados após a carbonização do PAN em atmosfera de carbono. Dependendo do módulo de Young desejado, um método de grafitação especial combinado com um alongamento da barra é aplicado. Um tratamento de superfície final aumenta a adesão entre a matriz e as fibras. Durante este processo de produção, óxidos são formados na superfície das fibras. Essas substâncias protegem a fibra contra o ambiente.

A estrutura atômica do grafite é montada em camadas. Esta propriedade leva a

teoricamente valores mecânicos altos de módulo de elasticidade (SCHURMANN, 2007). Verifica-se, além disso, que os defeitos diminuem essas propriedades. Diferentes grupos de tipos de fibra de carbono foram desenvolvidos de acordo com seus valores de resistência e rigidez. Seis deles estão listados a seguir e sua resistência e módulo de Young são descritos na Figura 10.

Figura 10 Tensão e módulo de elasticidade para diferentes tipos de fibras de carbono



Fonte: (FREUDENBERG, 2011)

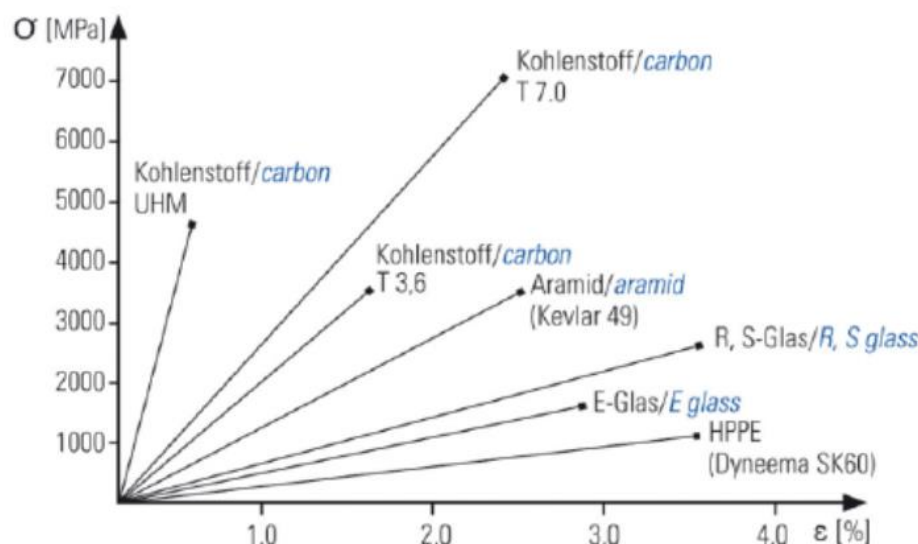
- Alta resistência – HT;
- Ultra-alta tensão – UT;
- Módulo intermediário /Força – IMS;
- Módulo Alto – HM;
- Alto Módulo/Força – HMS;
- Módulo ultra-alto/Força – UMS.

Para a análise de compostos de carbono é importante mencionar que as fibras de carbono mostram comportamento de material anisotrópico. O módulo de Young na direção da fibra é de uma magnitude maior do que a direção transversal. Outra característica bastante incomum pode ser observada em relação à expansão térmica. O coeficiente de Poisson na direção transversal é positiva, enquanto na direção longitudinal é negativa. Isso leva a um aumento das tensões térmicas se o compósito for submetido ao calor. Além disso, o comportamento de *cracking* é profundamente frágil e o alongamento na fratura muito baixo.

Como mencionado anteriormente, existem outros tipos de fibras disponíveis hoje. A Figura 11 mostra uma comparação das curvas tensão-deformação de diferentes fibras. Como pode ser visto, quanto mais alto o módulo de Young de uma fibra, menor a deformação final.

Uma exceção é o T700 (também T7.0), fibra de carbono que mostra uma capacidade de deformação muito alta, mesmo em alta resistência e módulo de elasticidade intermediário.

Figura 11 Curva de tensão/deformação para diferentes tipos de fibras



Fonte: (FASERVERBUNDWERKSTO, 2021)

2.6 Materiais cimentícios com fibras

Atualmente, pesquisadores ao redor do mundo estudam a utilização de fibras em compósitos de matriz cimentícia. Entre elas, destacam-se as fibras de aço, fibras de vidro, fibras de basalto, fibras de PVA, fibras de PP e fibras naturais. As fibras sintéticas têm grande vantagem em relação às fibras naturais, devido à alta resistência mecânica e química. A aplicação de concreto reforçado com fibra (FRC) na engenharia de estruturas ganhou interesse mundial devido às suas propriedades mecânicas em comparação ao concreto armado convencional, como sua alta resistência à primeira fissura (BRANSTON; DAS *et al.*, 2016).

Shi (2020) estudaram experimentalmente as propriedades mecânicas do híbrido basalto-macro polipropileno, concreto reforçado com fibra. Três frações de volume de fibra de macro polipropileno (0,3%, 0,7% e 1%), duas de concreto de resistências à compressão (30 MPa e 60 MPa) e fração volumétrica de fibra de basalto 0,1% foram usados para estudar a resistência à compressão e capacidade de flexão do concreto reforçado com fibras. A energia de fratura do concreto teve uma influência significativa na resposta pós-fissuração do concreto reforçado com fibras e, portanto, do concreto, com diferentes resistências, mostraram comportamentos distintos. Ambos os tipos de concreto C30 e C60 mostraram que o uso de basalto híbrido e as macro fibras de polipropileno podem atingir aproximadamente 10% e 20% de melhora na

resistência à compressão e resistência à flexão, respectivamente.

Diferentes tipos de fibras de reforço desempenham papéis diferentes na melhoria do desempenho do material cimentício, e elas também podem introduzir propriedades diferentes para concreto. Por exemplo, a adição de fibras com alta resistência à tração, como fibra de aço e fibra de basalto, não só melhora a resistência à tração do concreto, mas também aumenta a capacidade de deformação, resistência e capacidade de absorção de energia do material (RÍOS, LEIVA *et al.*, 2019); uma melhor resistência ao impacto pode ser alcançada usando fibra de aço (LIN, 2018); fibra de carbono pode melhorar a condutividade elétrica do concreto (KAI; ALBERT *et al.*, 2019; YISKA; ODED *et al.*, 2015; MIN; PEIWEI *et al.*, 2017; ALIREZA; HALIL *et al.*, 2017); e fibra PP pode aumentar a porosidade do concreto após o aquecimento, melhorando assim a resistência à fragmentação (MUGUME; BANGI, 2011; JEAN; PIERRE *et al.*, 2010). A Tabela 1 mostra as propriedades mecânicas para cada tipo de fibra.

Tabela 1 Propriedades mecânicas/físicas de diferentes fibras

Tipo de fibra	Resistência à Tração (MPa)	Módulo de elasticidade (GPa)	Alongamento (mm)	Massa específica (g/cm³)	Ponto de fusão °C
Aço	200-2760	200	0,5	7,8	1370
Vidro	1034-3792	72	1,5-3,5	860	860
PE	690	0,14-0,41	0,95	141,4	141,4
PP	552-690	3,45	0,90	170	170
PVA	1000-1600	22-42	1,3	220-240	220-240
Basalto	872-2800	40-89	3,15	2,8	1500-1700
Carbono	1550-6960	159-956	2,5-3,2	1,8	Mais de 3000
Nylon	750-1000	2,5-5,17	15-30	1,14	231-252
Juta	400-800	13-26,5	1,8	1,3-1,45	-

Fonte: Bengi, Hwai, 2008; Kai, Albert, *et al.*, 2019; Ahmet, Nihat, *et al.*, 2015; Zhigang, Qian, 2018; Razmi, Mirsayar, 2017; Kim, Eom, *et al.*, 2014.

Vários pesquisadores estudaram o comportamento das fibras de carbono no concreto (ESMAEILI; SHARIFI, *et al.*, 2019). Eles realizaram uma investigação experimental e analítica sobre concreto reforçado com mantas têxteis de carbono que foi danificado pelo calor. Observaram então o aumento da resistência mecânica com incremento das mantas.

Nahum *et al.*, (2020) avaliaram o desempenho à flexão de vigas de concreto estrutural

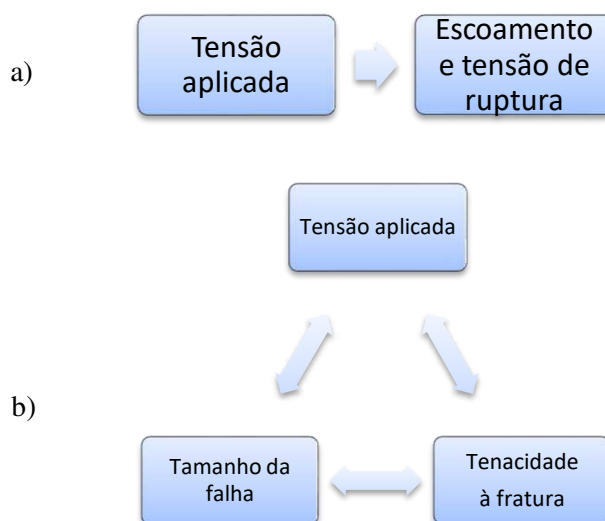
reforçadas com tecidos têxteis de carbono — *Textile Reinforced Concrete* (TRC), verificaram o modo de ruptura, e o comportamento à flexão foi significativamente influenciado pelo cisalhamento e a configuração de reforço: maiores valores de suporte de carga de flexão sem delaminação foram observados nas vigas TRC de tecido em forma de U, enquanto as vigas TRC de concreto armado exibiram delaminação severa com menores valores de carga de flexão.

3 MECÂNICA DA FRATURA DE MATERIAIS

A mecânica da fratura é uma teoria que objetiva caracterizar o comportamento dos materiais mediante a presença de uma trinca e como se dá a sua propagação. A presença de defeitos em materiais durante o processo de fabricação é algo recorrente na indústria metal/mecânica/civil. Devido a este fato, tornou-se de fundamental importância o estudo relacionando estes defeitos com solicitação mecânica. Com isso, surgiu inicialmente a mecânica da fratura linear elástica para metais, em seguida, deu-se o estudo da mecânica da fratura elasto-plástica. Recentemente, com o avanço da tecnologia e a fabricação de materiais compósitos de alto desempenho tornou-se de grande relevância o estudo da mecânica da fratura para sua aplicação. O fator de intensidade de tensão denominado K é um fator relacionado à mecânica da fratura linear elástica, em que obtemos este valor em função da geometria do corpo de prova e a força aplicada (ANDERSON, 2017).

A Figura 12 mostra uma comparação entre abordagens da mecânica da fratura. No primeiro caso é considerado a relação entre tensão aplicada e escoamento do material/ruptura (material dúctil) ou a tensão de ruptura, caso um de material frágil. No segundo caso, há uma relação entre a tensão aplicada e o tamanho da trinca presente no material que leva a tenacidade à fratura do material.

Figura 12 Comparação da abordagem da mecânica da fratura ao projeto com a abordagem tradicional de resistência dos materiais: (a) a abordagem da resistência dos materiais e (b) a abordagem da mecânica da fratura/ tamanho da falha



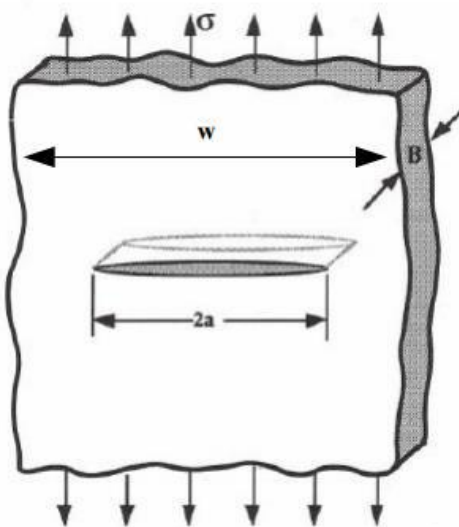
Fonte: Anderson (2017)

3.1 Equação de Griffith

A teoria proposta por Griffith, em 1920, baseia-se em estudos relacionados à primeira lei da termodinâmica, em que ele aplicou este conceito à mecânica da fratura. A teoria propõe que, devido à nucleação da trinca, há um avanço na quebra das ligações trativas que atuam na superfície da falha, liberando energia. No instante seguinte a essa operação, as deformações, e portanto a energia potencial em consideração, têm seus valores originais; mas em geral, o novo estado não é um de equilíbrio. Este estado alcançado não é de equilíbrio, aplicando dessa forma o teorema da mínima energia potencial, em que a energia potencial se reduz até atingir uma condição de equilíbrio. Considerando-se uma placa submetida a uma tensão constante, contendo uma trinca de comprimento $2a \ll w$ sendo “w” a largura da placa, conforme Figura 13, na qual o Estado plano de tensões (EPT) seja dominante, a Teoria de Griffith sugere que o balanço de energia para um incremento na área fraturada (dA) pode ser dado pela Equação (34).

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dWs}{dA} \quad (34)$$

Figura 13 Trinca passante numa placa submetida a uma tensão trativa remota



Fonte: Anderson (1994).

Sendo “E” a energia total do sistema, “ Π ” a energia potencial (dada pela energia interna de deformação e pelas forças externas) e “Ws” o trabalho destinado a criar novas superfícies, Griffith (1920) chegou à seguinte expressão, dada pela Equação (35).

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (35)$$

Onde σ_f é a tensão de fratura, γ_s é a energia superficial do material e a é tamanho da trinca.

3.2 Modos de Solicitação

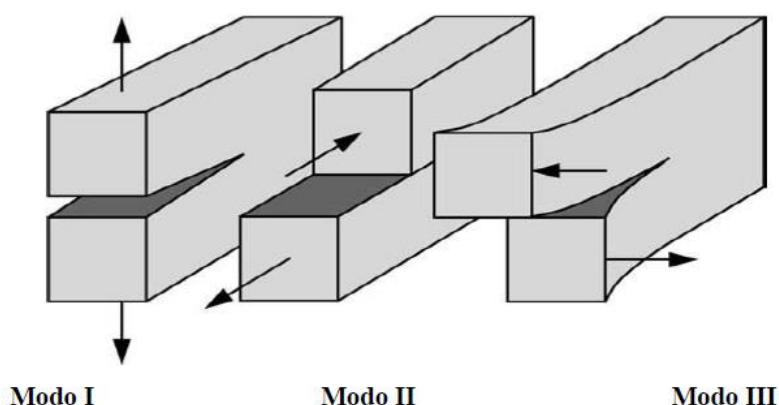
A fratura de componentes com defeitos também pode ser analisada pela análise de tensão em conceitos da teoria da elasticidade. Usando modificações de métodos de análise descritos por Westergaard, Irwin publicou soluções para distribuição de tensão na ponta da trinca associada com os três modelos principais de carregamento. Vale ressaltar que estes modelos envolvem diferentes deslocamentos da superfície da trinca, demonstrado na Figura 14.

Modo I – Modo de abertura ou de tração, onde a superfície da trinca se afasta diretamente.

Modo II – Modo de cisalhamento deslizante ou em plano, onde as superfícies da trinca deslizam uma sobre a outra.

Modo III – Modo de rasgamento ou cisalhamento fora do plano, onde as superfícies de trinca se movem paralelamente em direções opostas.

Figura 14 Modos de solicitações



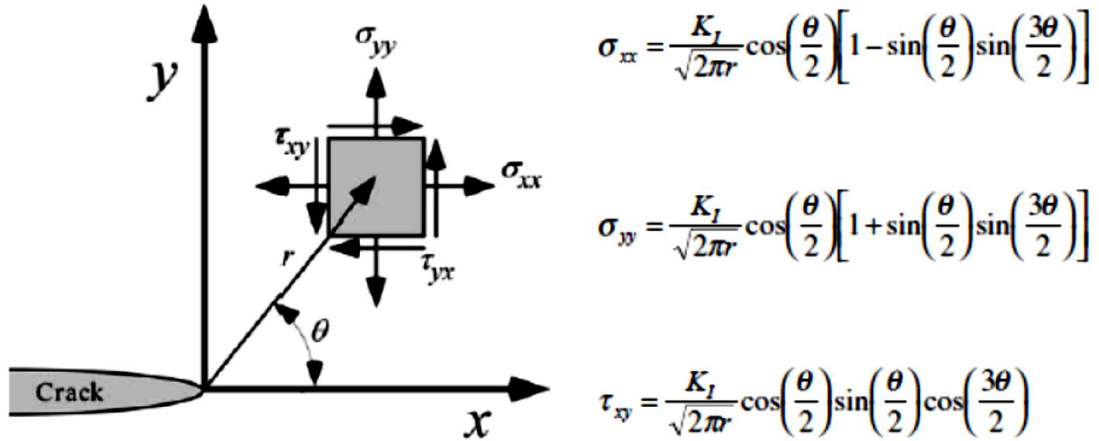
Fonte: Anderson (2017)

3.3 Fator de intensidade de tensão

O modo como o carregamento é aplicado ao corpo de prova apresenta uma característica na ponta da trinca elíptica, proporcionalmente a uma constante “k”, a um fator “f_{ij}”(uma função

adimensional de θ no termo principal) que depende do modo de carregamento e a um fator inversamente proporcional à raiz quadrada do raio da ponta da trinca (ANDERSON, 1994). A Figura 14 representa um elemento infinitesimal próximo à ponta da trinca. Este “k” representa o fator de intensidade de tensão (K).

Figura 15 Distribuição de tensão no entorno da ponta da trinca



Fonte: Anderson (2017)

Griffith (1920) foi o primeiro a propor o critério de energia para a fratura, mas Irwin (1956) é principalmente responsável por desenvolver a presente versão desta abordagem: a taxa de liberação de energia, G , que é definida como a taxa de mudança na energia potencial com área de trinca para um material elástico linear. No momento da fratura, $G = G_c$, a taxa crítica de liberação de energia é uma medida de resistência à fratura. Para uma trinca de comprimento $2a$ em uma placa infinita sujeita a uma tensão de tração, a taxa de liberação de energia é dada pela equação (36).

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (36)$$

Onde E é o módulo de Young, σ a tensão aplicada, e a é o comprimento da meia trinca. Na fratura, $G = G_c$, e a equação (36) descreve as combinações críticas de tensão e tamanho da trinca para falha.

A falha ocorre quando $KI = K_{Ic}$. Nesse caso, KI é a força motriz para fratura e K_{Ic} é uma medida de resistência material. Como G_c a propriedade de similitude deve se aplicar ao K_{Ic} . Isto é, o K_{Ic} é assumido como uma propriedade de material independentemente do tamanho. O fator de intensidade de tensões é dado de acordo com a Equação (37).

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (37)$$

A comparação das Equações (36) e (37) resulta em uma relação entre KI e G :

$$\mathcal{G} = \frac{K_I}{E} \quad (38)$$

Essa mesma relação obviamente se aplica a G_C e KI_C . Assim, a intensidade de energia e tensão nas abordagens para a mecânica da fratura são essencialmente equivalentes para materiais elásticos lineares.

Cada tipo de material apresenta fator de intensidade de tensão característico KI_C , conforme pode ser visto na Tabela 2.


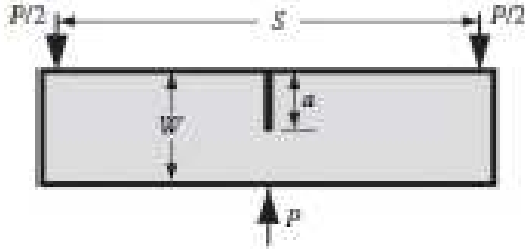

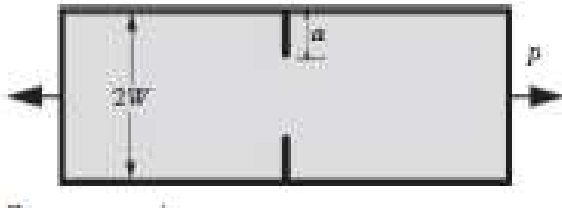
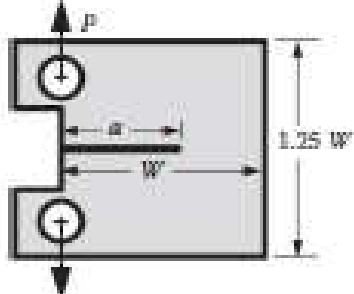
Tabela 2 Valores típicos de tenacidade à fratura, KI_C , em estado plano de deformação

Material			
Metálico	Liga de alumínio (7075-T651)	Liga de alumínio (2024-T3)	Liga de titânio (Ti-6Al-4V)
$KI_C(\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$	24	44	55
Cerâmicos	Concreto	Oxido de alumínio	“Soda-lime Glass”
$KI_C(\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$	0,2 a 1,4	2,7 a 5,0	0,7 a 0,8
Polimérico	Poli (metacrilato de metila) (PMMA)	Poliestireno (PS)	Policarbonato (PC)
$KI_C(\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$	0,7 a 1,6	0,7 a 1,1	2,2

Fonte: Calliste (2008)

A Tabela 3 apresenta as principais soluções de KI para amostras de testes comuns. Onde cada geometria tem uma função $f\left(\frac{a}{W}\right)^a$.

Tabela 3 Soluções de KI para amostras de testes comuns

Geometria	$f\left(\frac{a}{W}\right)^a$
<p><i>Single-edge notched tension (SENT)</i></p> 	$\frac{\sqrt{2 \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[0.752 + 2.02 \left(\frac{a}{W}\right) + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2W}\right)^3 \right]$
<p><i>Single-edge notched bend (SE(B))</i></p> 	$\frac{3\left(\frac{S}{W}\right)\sqrt{a/W}}{2\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)\right)^{3/2}} \left[1.99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left\{ 2.15 - 3.93 \left(\frac{a}{W}\right) + 2.7 \left(\frac{a}{W}\right)^2 \right\} \right]$
<p><i>Center-cracked tension (CCT)</i></p> 	$\sqrt{\frac{\pi a}{4W}} \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \left[1 + 0.025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$
<p><i>Double-edge notched tension (DENT)</i></p> 	$\frac{\sqrt{\pi a/2W}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{W}\right)}} \left[1.222 - 0.561 \left(\frac{a}{W}\right) - 0.205 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.471 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 0.190 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$
<p><i>Compact specimen</i></p> 	$\frac{2 + \left(\frac{a}{W}\right)}{(1 - (a/W))^{3/2}} \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.60 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]$
$^a K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right), \text{ onde B é a espessura da amostra}$	

Fonte: Anderson (2017)

3.4 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFEL), a princípio, é aplicada à análise de materiais que apresentam ruptura frágil, e de certa forma, usualmente rompem por clivagem. Essa é considerada a forma de fratura mais frágil de fraturamento que ocorre, geralmente, em materiais cristalinos. Nos materiais ditos metálicos a ruptura que acontece nos planos cristalográficos, por causa que nesses pontos ocorre à ruptura das ligações atômica (BROEK, 2012).

Com relação à dissipação de energia, em condições normais, é considerada nula ou desprezível para a plastificação dos materiais frágeis. Isso significa que quando iniciado o faturamento, a fissura se propaga sem a necessidade de acréscimo de carregamento (ISAIA, 2017).

Em materiais metálicos, como o tungstênio e o cromo, apresentam esse tipo de ruptura, cujas estruturas cristalinas são cúbicas. Em outros materiais que apresentam estruturas cristalinas hexagonais compactas como zinco e berílio também ocorre este tipo de fratura frágil. Na construção civil destaca-se os aços de alta resistência que apresentam ruptura frágil. Em materiais compósitos de matriz cimentícia, o regime de fratura é próximo ao frágil, como o concreto de alta resistência. Um dos aspectos observados é que a ruptura por propagação de fissura é majoritariamente transgranular. Dessa forma, percebe-se baixa quantidade de crescimento subcrítico da fissura (ISAIA, 2017).

3.5 Mecânica de Fratura Elasto-Plástica

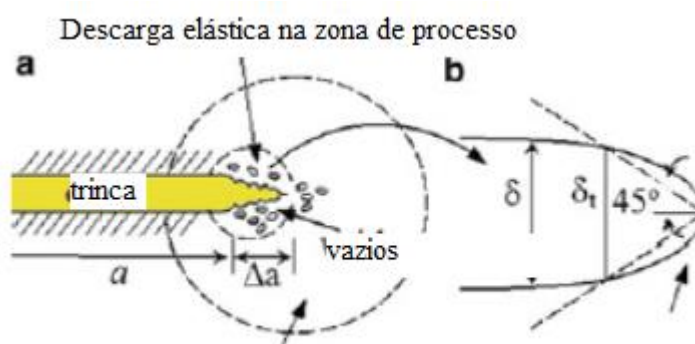
O mecanismo de fratura está relacionado à deformação plástica na ponta da trinca onde altas tensões e deformações são desenvolvidas. Logo, a aplicação de um modelo de deslocamento para determinar tensões e deformações é a abordagem matemática ideal para prever a instabilidade da trinca. Em vez disso, para um material elasto-plástico trincado submetido a uma carga externa, o início da plasticidade ocorre na ponta da trinca, e o critério que prevê o início da instabilidade da fissura é geralmente o Integral-J, que é limitado a uma trinca estacionária em um material de endurecimento por deformação (PEREZ, 2017).

Conforme estudos de Rice (1968), o integral J é uma versão particular da taxa de mudança na energia potencial, e é matematicamente definida como um caminho independente integral de linha. A utilidade da integral J no campo da fratura elástico-plástica a mecânica é significativa para determinar a tenacidade à fratura no início do crescimento da fissura (RICE,

1968).

A Figura 16 mostra o modelo de crescimento de fissuras que indica a região dominada por J , onde ocorre separação microscópica e está dentro de uma grande zona plástica. Uma característica particular de uma fissura dúctil e deformação material endurecível é a ocorrência de embotamento de trinca Figura 16b antes do crescimento da fissura, ocorre sob carregamento monotônico. Embora isso, a *Integral-J* não modela a descarga elástica, o crescimento da fissura controlada por J requer que a região de descarga elástica e carga não proporcional distinta seja contida com a região dominada por J da teoria de deformação (HUTCHINSON, 1983). Assim, a quantidade de trinca e o crescimento deve estar relacionado ao tamanho da zona de plástica r , à integral J e à ponta da trinca de deslocamento de abertura.

Figura 16 Processo esquemático de zona dentro da região de domínio J. (a) Domínio J e (b) embotamento da ponta da fissura.



Fonte: Perez (2017)

A integral de contorno J teve grande sucesso como um parâmetro de caracterização de fratura para materiais não lineares. Ao idealizar a deformação elástica-plástica como elástica não linear, Rice (1968) forneceu a base para estender a metodologia de mecânica da fratura bem além da validade de limites do LEFM.

A Equação (39) define a taxa de liberação de energia para materiais lineares. A mesma definição vale para materiais elásticos não lineares, exceto que G é substituído por J :

$$J = \frac{d\Pi}{dA} \quad (39)$$

Podemos expressar J em termos de carga e deslocamento (Equação – (40)):

$$J = - \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\Delta} P \Delta \right)_{\Delta}$$

$$J = - \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\Delta} d\Delta \quad (40)$$

Portanto, J é uma versão mais geral da taxa de liberação de energia. Para o caso especial de um linear material elástico, $J = G$ (Equação – 41). Além disso, para carregamento linear elástico Modo I.

$$J = \frac{K_I}{E'} \quad (41)$$

Quando o comportamento do material é linear e elástico, o cálculo de J em um corpo de prova ou estrutura é relativamente simples porque $J = G$ e G está relacionado exclusivamente ao fator de intensidade de tensão. A última quantidade pode ser calculada a partir da carga e do tamanho da trinca, assumindo uma solução K para essa geometria específica disponível. Calcular a integral J é um pouco mais difícil quando o material é não linear. O princípio da superposição não se aplica mais e J não é proporcional à carga aplicada. Assim, uma relação simples entre J , carga e comprimento da trinca geralmente não está disponível (ANDERSON, 2017).

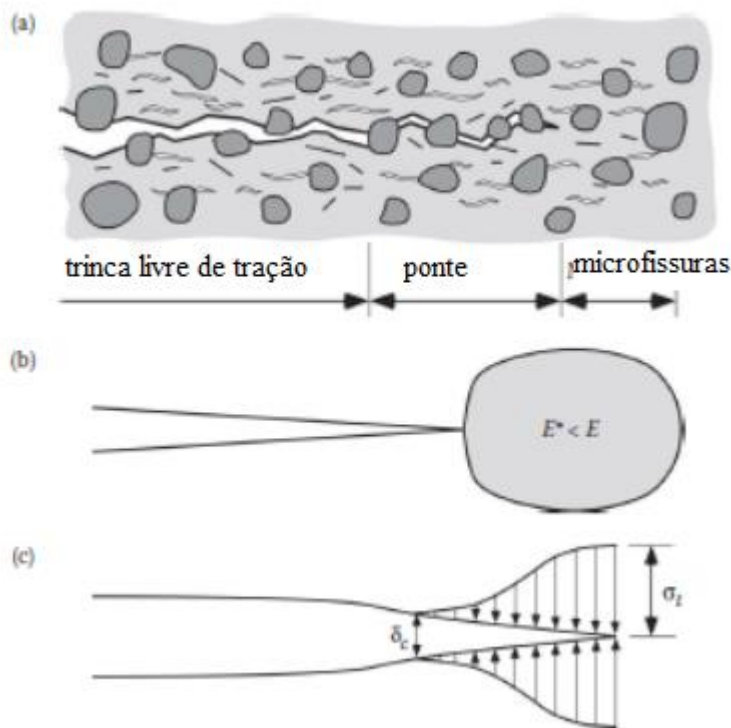
3.6 Influências das fibras no Fator de Intensidade de Tensão em materiais compósitos cimentícios

Primeiramente, antes de entender a influência das fibras nos materiais com matriz cimentícia, deve-se entender como é o comportamento mecânico da matriz sem reforço. Com relação ao concreto, embora o ele e a rocha sejam frequentemente considerados frágeis, eles são, na verdade, materiais quase frágeis que são mais resistentes do que a maioria das chamadas cerâmicas avançadas. Na verdade, muito da pesquisa sobre mecanismos de tenacificação em cerâmica visa à tentativa de fabricação de cerâmica. Os compósitos se comportam mais como concreto. O concreto e a rocha derivam sua tenacidade da fissura subcrítica que precede a última falha. Este dano subcrítico resulta em resposta não linear de tensão-deformação e

Comportamento da curva R. Uma abordagem tradicional de resistência dos materiais para projetar com concreto provou inadequada porque a resistência à fratura geralmente depende do tamanho (BAZANT, 1984). Essa dependência de tamanho se dá, pois a deformação não linear nestes materiais é causada por trincas subcríticas e não por plasticidade. Isso mostra as tentativas iniciais de aplicar a mecânica da fratura ao concreto (ANDERSON, 2017).

A Figura 17.a ilustra esquematicamente a formação de uma zona de processo de fratura no concreto, junto a duas idealizações da zona de processo. Microfissuras se formam antes de uma trinca macroscópica, que consiste em uma zona em ponte diretamente atrás da ponta, e uma zona livre de tração mais atrás da ponta — essas três regiões, bem definidas, estão indicadas na Figura 17a. A ponte é o resultado da interface fraca entre os agregados e a matriz. A zona de processo pode ser modelada como uma região de amolecimento de tensão (Figura 17b) ou como uma trinca mais longa que está sujeita a tensões de fechamento (Figura 17c). Este último é uma ligeira modificação na faixa Dugdale-Barenblatt, modelo de produção (ANDERSON, 2017).

Figura 17 Ilustração esquemática do crescimento de fissuras no concreto, juntamente a dois modelos simplificados: (a) crescimento de fissuras no concreto; (b) zona de processo idealizada como uma zona de amolecimento de tensão; e (c) zona de processo idealizada por tensões de fechamento



Fonte: Anderson (2017)

A partir desses estudos sobre a mecânica da fratura do concreto, vários pesquisadores

estão buscando melhorar a tenacidade à fratura do concreto através da inserção de fibras. Um desses estudos foi realizado por Vantadori *et al.* (2016), onde estudaram o modo I de fratura de vigas de concreto por meios da versão modificada do modelo de dois parâmetros. Nessa pesquisa foi utilizada microfibras sintéticas de polipropileno, sendo a matriz constituída de cimento, água e agregados (fração mássica = 1:0,7: 3,6). Foram realizados ensaios de tenacidade à fratura e comparou-se com resultados teóricos. O Concreto e concreto reforçado com fibra são misturas não homogêneas devido a agregados e fibras misturados na matriz cimentícia. Devido à falta de homogeneidades microestrutural, as fissuras podem desviar durante a extensão da fratura. Portanto, levar em conta tais possibilidades, foi proposta uma versão modificada do modelo *two-parameter model* (TPM). Ensaios de flexão de três pontos em ambas as amostras de concreto e amostras de concreto reforçado com fibras de polipropileno microssintéticas, experimentalmente, a fim de avaliar o modelo proposto. Conclui-se que, aplicando o TPM, de acordo com sua formulação original, a tenacidade à fratura por esforço plano do Modo I é superestimada em até 19% para concreto simples e até 10% para concreto reforçado com fibra.

Bernardi (2017) determinou a tenacidade à fratura de concreto reforçado com fibras por análise numérica. Foram realizados testes experimentais em corpos de prova de concreto reforçado com fibras de polipropileno. Os testes foram feitos em vigas de entalhe único sob flexão de três pontos. Tais testes experimentais foram modelados numericamente através de análises não lineares de elementos finitos, onde lei constitutiva do concreto reforçado com fibra foi implementada. Foi empregado *crack mouth opening displacement* (CMOD) para determinar o fator crítico de intensidade de tensão, de acordo com o modelo de dois parâmetros. A comparação entre esses resultados numéricos e os obtidos pelo emprego de ambas as curvas de carga-CMOD experimentais e o modelo de dois parâmetros mostrou uma concordância bastante satisfatória.

Carpinteri *et al.* (2017) pesquisaram a tenacidade à fratura do concreto (modo I) e do concreto reforçado com fibra. Neste trabalho foram caracterizados por fibras fibriladas de polipropileno microssintéticas distribuídas aleatoriamente na matriz cimentícia. O modelo modificado de dois parâmetros foram empregados para levar em consideração a possível deflexão de fissuras durante a propagação estável da trinca. Três tipos de amostras foram analisados: (a) concreto sem fibras; (b) amostras de concreto com teor de fibras igual a 0,5% em volume; ou (c) teor de fibra igual a 2,5% em volume. A tenacidade à fratura do concreto foi observada com o aumento da fração volumétrica de fibras, e uma equação também foi proposta para estimar esse parâmetro para um determinado conteúdo de fibra. A superestimação da

tenacidade à fratura determinada considerando a propagação de trincas sob carga pura no Modo I também foi avaliada, e uma equação foi proposta para calcular tal incremento para um determinado valor do ângulo de torção.

Kazberuk e Krassowska (2019) apresentam os resultados de um programa experimental focado no efeito de fibras não metálicas (basalto) nas propriedades de fratura do concreto investigado nas condições do Modo I. Os resultados da medição da tenacidade e das características de absorção de energia mostraram que as amostras de concreto reforçado com fibra de basalto adquirem um ótimo comportamento dúctil e capacidade de absorção de energia, em comparação com as amostras comuns de concreto. A adição de fibra de basalto na quantidade testada de 2-8 kg/m³ tem uma influência significativa nos parâmetros mecânicos de fratura do concreto, com relativamente pouco impacto na resistência à compressão do concreto.

A presença de fibras melhorou os parâmetros da mecânica da fratura, como K_{IC}, *Crack tip opening displacement* (CTOD_c), taxa de liberação de energia (GF) e registrou valores máximos de carga. A análise das relações *Load-crack mouth opening displacement* (P-CMOD) mostra que o reforço disperso pode alterar significativamente a natureza do comportamento do elemento de concreto sujeito à flexão nas fases de pré-fissuração e pós-fissuração. As mudanças nos parâmetros da mecânica da fratura e a modificação das parcelas de P-CMOD, registradas sob carga, indicam que as fibras de basalto podem aumentar a resistência do concreto à iniciação e propagação de trincas. Os parâmetros de fratura de concretos com fibras de basalto também são determinados pelo tipo de cimento. Os resultados obtidos podem ser úteis no desenvolvimento de aplicações práticas de fibras de basalto em estruturas de concreto.

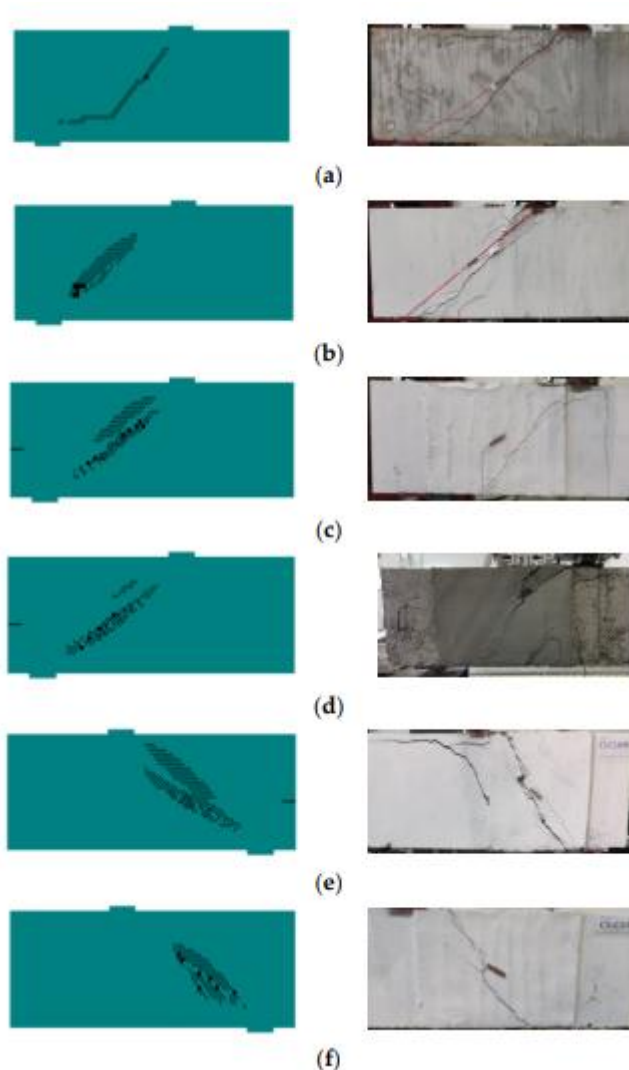
4 ELEMENTOS FINITOS

4.1 Análise por elementos finitos

O métodos dos elementos finitos estão cada vez mais presentes na engenharia, devido ao avanço computacional. Atualmente, é possível realizar simulações para resolver problemas mais complexos como pode ser visto nos estudos de Allah *et al.* (2020), que examinam a eficácia do uso de compósitos de matriz reforçada com tecido de carbono (C-FRM) para melhorar a resposta ao cisalhamento de vigas profundas de concreto armado (CA).

Dez vigas profundas de CA foram testadas. As variáveis de teste incluíram a presença de estribos internos de aço, o número de camadas de C-FRM, o ângulo de inclinação da segunda camada de C-FRM e o tipo de matriz. Os resultados do referido estudo mostraram que o uso de C-FRM com matrizes cimentícias e geopoliméricas resultaram em ganhos significativos de resistência ao cisalhamento, especialmente na ausência de estribos mínimos. O aumento do número ou da orientação das camadas de C-FRM teve um efeito insignificante no ganho de resistência ao cisalhamento. O modo de falha das vigas reforçadas mudou para uma compressão diagonal, indicando uma melhor utilização do concreto. Modelos numéricos foram desenvolvidos para prever a resposta ao cisalhamento das vigas testadas. Os resultados da modelagem numérica foram consistentes com os obtidos dos ensaios. Como pode ser visto na parte dos resultados obtido pelos estudos de Allah *et al.* (2020).

Figura 18 Modelagem numérica do concreto

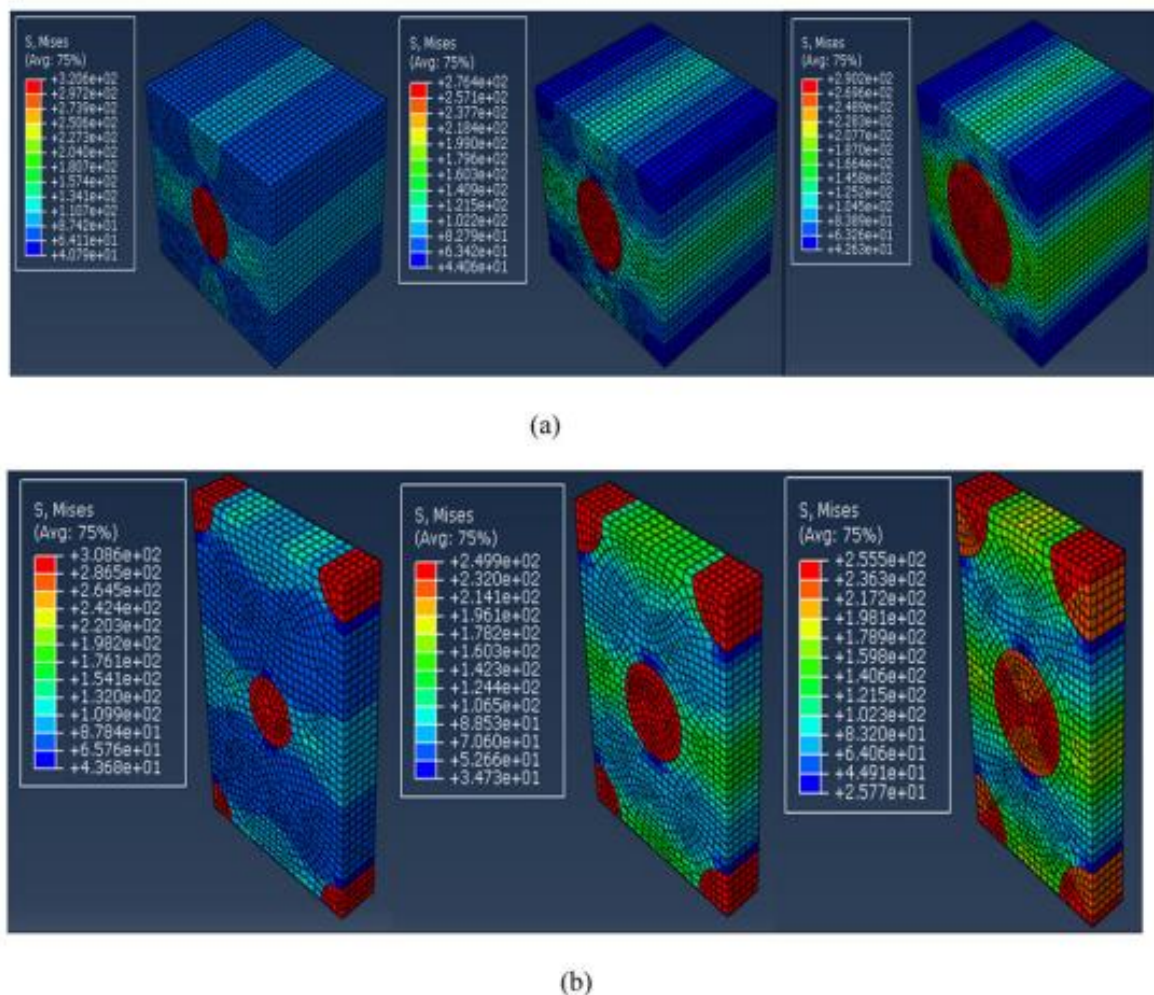


Fonte: Allah et al. (2020).

Adeniyi *et al.* (2019) avaliaram as propriedades elásticas efetivas de compósitos de poliestireno reforçados com fibras de sisal usando uma abordagem de homogeneização numérica. Os autores compararam os resultados experimentais com modelos analíticos e análises por elementos finitos usando elementos de volume representativo (RVE) com geometrias quadrada e hexagonal (Figura 19). Eles concluíram que as propriedades elásticas dos compósitos são afetadas por parâmetros como a fração volumétrica de fibras, a área transversal das fibras e o RVE. Eles também observaram que os resultados da análise por elementos finitos concordam parcialmente com os resultados experimentais e analíticos, dependendo do tipo de propriedade elástica e do RVE considerados. O artigo contribui para o desenvolvimento de compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras naturais como

materiais estruturais potenciais.

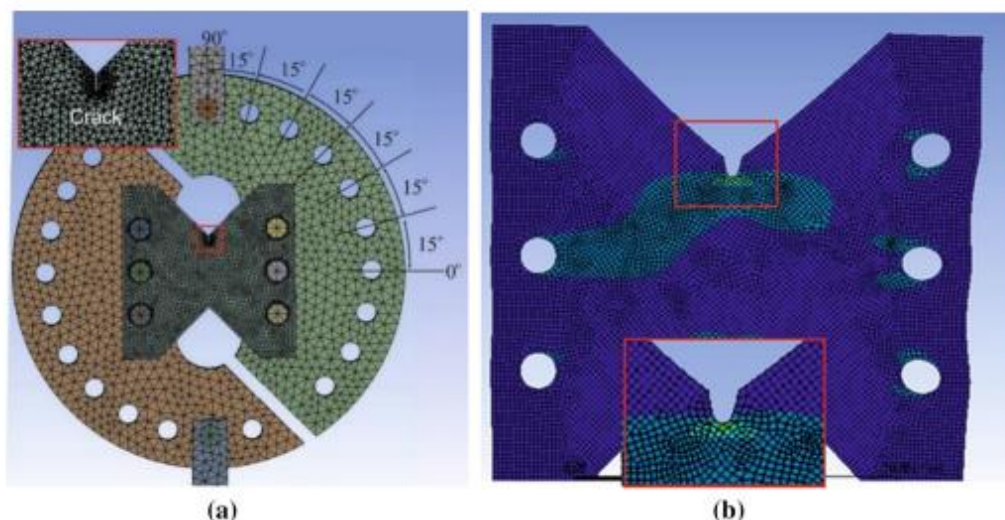
Figura 19 Módulo longitudinal de tensão de cisalhamento em (a) RVE quadrado com fibra circular e (b) RVE hexagonal com fibra circular



Fonte: Adeniyi et al. (2019)

Seçkin e Balcıoğlu (2020) comparam os métodos de aprendizado de máquina e análise de elementos finitos no comportamento de fratura de compósitos poliméricos. Os autores empregaram o método de Integral-J para modelar a fratura em diferentes modos de carregamento e ângulos de trinca (Figura 20). Eles também aplicam quatro algoritmos de aprendizado de máquina (KNN, DT, RF e SVM) para prever a tenacidade à fratura dos compósitos. Eles concluem que os resultados da análise de elementos finitos e do aprendizado de máquina estão em boas concordâncias com as medições experimentais. O artigo é uma contribuição importante para a comparação de técnicas de aprendizado de máquina com FEA em aplicações de regressão.

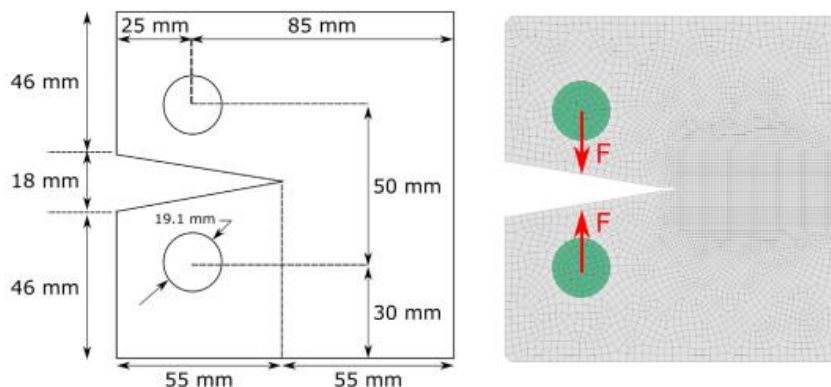
Figura 20 2D modelo FEA Arcan Test do amostra a antes e (b) depois da análise numérica



Fonte: Seçkin e Balcıoğlu (2020)

Reiner *et al.* (2021) apresentam um framework rico em dados para caracterizar consistentemente a resposta de amolecimento da macrodeformação de compósitos laminados submetidos a cargas compressivas. Primeiro, um modelo de elemento finito de dano contínuo eficiente é usado para simular testes compactos de compressão de polímeros reforçados com fibra de carbono IM7/8552 *quasi*-isotrópicos (Figura 21), a fim de gerar um grande conjunto de dados virtuais para treinamento de modelos de aprendizado de máquina (ML). Em seguida, dois métodos ML são treinados; um baseado em arquitetura de rede neural guiada por teoria para resolver o problema inverso do FE, e outro baseado em redes neurais recorrentes com arquitetura Long Short-Term Memory (LSTM) para resolver o problema direto do FE, e as capacidades preditivas são comparadas. Verifica-se que o ML guiado por teoria para o problema inverso do FE produz valores elevados de perda e não é aplicável à caracterização do dano compressivo, enquanto um número mínimo de 5.000 simulações FE são necessárias para treinar modelos LSTM precisos para o problema direto. A calibração numérica usando o modelo LSTM treinado é validada com sucesso contra dados experimentais obtidos a partir de uma ampla gama de testes compressivos, incluindo estudos de efeito de tamanho em testes de compressão com furo aberto e testes de esmagamento axial de tubos compostos. A estratégia proposta demonstra a eficácia e os desafios do ML para reduzir os esforços experimentais para caracterização do dano em compósitos submetidos a cargas compressivas.

Figura 21 Geometria, dimensões e representação em elementos finitos de um teste para compressão em laminados *quasi*-isotrópico [90/45/0/-45]_{4s} IM7/8552



Fonte: Reiner *et al.* (2021)

4.2 Método dos elementos finitos estendidos (XFEM)

O método dos elementos finitos estendidos (XFEM), também conhecido como método dos elementos finitos generalizados (GFEM) ou método de partição de unidade (PUM), é uma técnica numérica que estende o método clássico de elemento finito (FEM), estendendo o espaço de solução para soluções de equações diferenciais com funções descontínuas (ABRAHAM; VINCE, 1999).

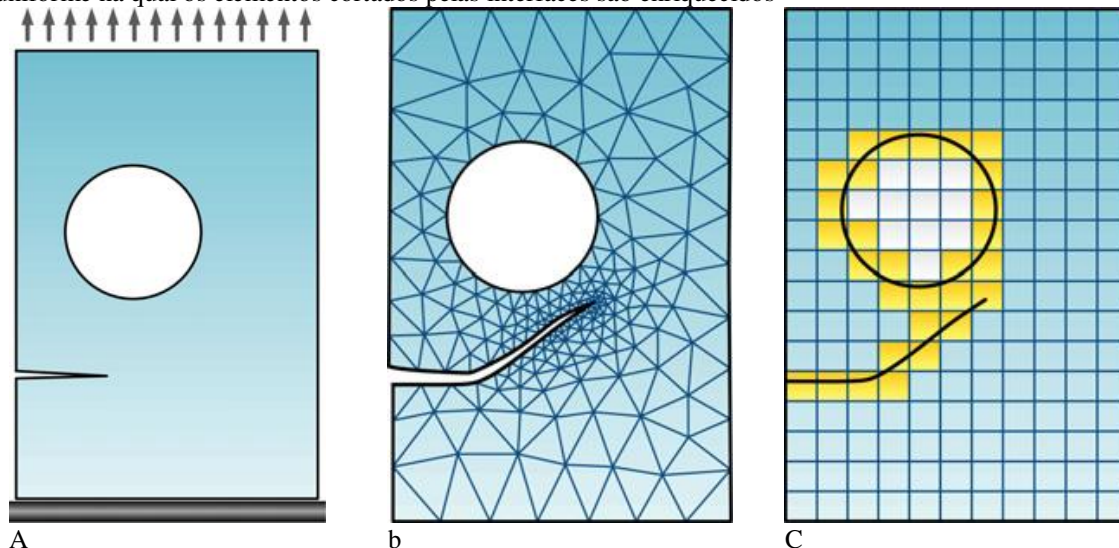
O método dos elementos finitos estendidos (XFEM) foi desenvolvido por Ted Belytschko e seus colaboradores em 1999 (MOES; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999), para ajudar a aliviar as “deficiências” do método dos elementos finitos e foi usado para modelar a várias discontinuidades. A ideia por trás do XFEM é reter a maioria das vantagens do método sem malha enquanto reduz seus efeitos negativos (ABRAHAM; VINCE, 1999).

Um método de elemento finito estendido foi desenvolvido para aliviar o problema de resolução de recursos locais que não podem ser resolvidos de forma eficaz pelo refinamento da malha. Uma das primeiras aplicações foi modelar trincas em materiais (ABRAHAM; VINCE, 1999). Nesta implementação original, funções de base descontínuas são adicionadas às funções de base polinomiais padrão dos nós pertencentes aos elementos interceptados pela fissura, para fornecer a base incluindo o deslocamento da abertura da trinca (ABRAHAM; VINCE, 1999). A principal vantagem do XFEM é que, nesse tipo de problema, não há necessidade de atualizar a malha de elementos finitos para rastrear o caminho da trinca. Pesquisas subsequentes demonstraram que esse método é mais eficaz em problemas envolvendo singularidades, interfaces de materiais, malha regular de recursos de microestrutura (como vazios) e outros problemas (em que recursos locais podem ser descritos por um conjunto de funções de base

apropriadas), e amplamente utilizado (ABRAHAM; VINCE, 1999).

Para modelar com precisão as descontinuidades com o FEM, é necessário conformar a discretização (malha) à linha ou superfície de descontinuidade. Isso se torna uma grande dificuldade ao tratar problemas com descontinuidades em evolução, onde a malha deve ser regenerada em cada passo. No FEM padrão, singularidades ou camadas limite são resolvidas exigindo malha significativa e refinamento nas regiões onde os gradientes dos campos são grandes. De fato, a modelagem de descontinuidades com o FEM é complicada devido à necessidade de atualizar a topologia da malha para conformar a geometria da descontinuidade (KHOEI, 2015)(Figura 22).

Figura 22 Modelagem de descontinuidades fracas e fortes nas técnicas de FEM padrão e FEM enriquecido: (a) Propagação de trinca em uma placa com furo; (b) O FEM padrão usando um refinamento de malha adaptável em que a malha está de acordo com a geometria das interfaces; (c) A técnica de MEF enriquecido usando uma malha uniforme na qual os elementos cortados pelas interfaces são enriquecidos

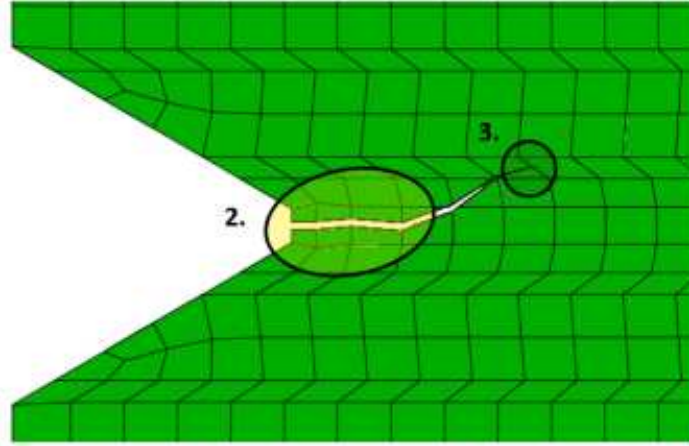


Fonte: Khoei (2015).

Um exemplo da aplicação do XFEM pode-se ser visto no estudo de Kiraly *et al.*(2023) em que modelo de degradação macroscópica de madeira que é considerado um compósito natural, utilizando o método XFEM para simular o comportamento de falha. O estudo utiliza um programa de processamento fotoanalítico para identificar anéis de crescimento em amostras de madeira e implementa seis critérios de iniciação de dano no solucionador de elementos finitos ABAQUS. O objetivo é determinar a carga máxima, localizar pontos fracos estruturais e obter um caminho realista de propagação de trincas através do XFEM. O modelo e as propriedades do material são calibrados com base em experimentos, considerando testes de flexão de três pontos, tração e compressão em amostras com entalhes. A Figura 23 mostra a

utilização XFEM para esse tipo de análise.

Figura 23 Vetor de deslocamento de elementos enriquecidos



Fonte: Kiraly *et al.*(2023)

A técnica de enriquecimento pode ser aplicada a uma região específica do domínio geral enriquecendo apenas dentro dessa região. As equações (42) e (43) a seguir mostram a aproximação final de elementos finitos usando funções de enriquecimento (MOHAMMADI, 2008).

$$u(x) = u^{FE} + u^{enr} \quad (42)$$

$$u(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x) \psi(x) a_k \quad (43)$$

O $N_j(x)$ refere-se às funções usuais de forma nodal, u_j é o vetor de graus regulares de liberdade nodal no método dos elementos finitos, a_k é o conjunto de graus de liberdade adicionado ao modelo de elementos finitos padrão, e ψ é a função de enriquecimento descontínuo, definida para o conjunto de nós que a descontinuidade tem em seu domínio de influência (suporte).

Para a análise da fratura em materiais no Abaqus, utiliza-se a proposta de Hevisad. As funções de enriquecimento compõem-se tipicamente das funções assintóticas próximas à ponta que capturam a singularidade ao redor da ponta da trinca e uma função descontínua que representa o salto no deslocamento através das superfícies da trinca. A aproximação para uma

função de vetor de deslocamento com enriquecimento de partição de unidade é dada por Moes *et al.* (1999) que pode ser vista na equação(44):

$$u = \sum_{I=1}^N N_I(x) [u_I + H(x)a_I + \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha}(x)b_I^{\alpha}] \quad (44)$$

Onde $N_I(x)$ são as funções de forma nodais usuais; o primeiro termo no lado direito da equação acima, u_I , é o vetor de deslocamento nodal usual associado à parte contínua da solução do elemento finito; o segundo termo é o produto do vetor de graus de liberdade enriquecidos nodais, a_I , e a função de salto descontínuo associada através das superfícies da trinca, no caso esse função de salto é denominada de Heaviside ($H(x)$); e o terceiro termo é o produto do vetor de graus de liberdade enriquecidos nodais, b_I^{α} , e as funções elásticas assintóticas associadas à ponta da trinca, $F_{\alpha}(x)$. O primeiro termo no lado direito é aplicável a todos os nós no modelo; o segundo termo é válido para nós cujo suporte da função de forma é cortado pelo interior da trinca; e o terceiro termo é usado apenas para nós cujo suporte da função de forma é cortado pela ponta da trinca.

A função $H(x)$ é dada por Moes *et al.* (1999)-equação(45):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x - x^*).n \geq 0, \\ -1 & \text{outro lado,} \end{cases} \quad (45)$$

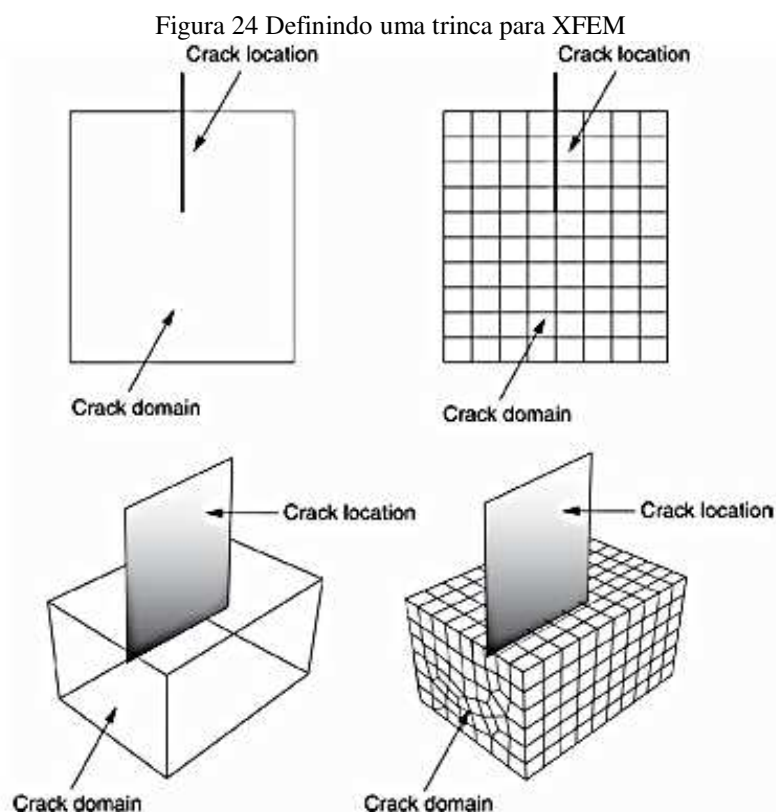
Onde x é um ponto de amostra (Gauss), x^* é o ponto na trinca mais próxima de x e n é a unidade externa normal à trinca em x^* . A função $F_{\alpha}(x)$ é representada por Fleming *et al.* (1997), equação(46):

$$F_{\alpha}(x) = [\sqrt{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \sin \theta \cdot \cos \frac{\theta}{2}] \quad (46)$$

Onde (r, θ) é um sistema de coordenada polar e sua origem está na ponta da trinca e $\theta=0$ é tangente à ponta da trinca.

Com relação à implementação do método no ABAQUS é necessário definir a localização inicial da trinca, nesse caso, é possível selecionar faces de um sólido tridimensional ou arestas de um modelo plano bidimensional. A localização inicial da trinca deve estar contida no domínio da trinca. A Figura 24 mostra exemplos do domínio da trinca e a localização da

trinca para geometria bi e tridimensional.



Fonte: Simulia (2022)

4.3 Integral de contorno com o método dos elementos finitos

Por padrão o Abaqus/*Standard* define a ponta da trinca como o primeiro nó especificado para a frente da trinca e a linha da trinca como a sequência dos primeiros nós especificados para a frente da trinca. O primeiro nó é o nó com o menor número de nós, a menos que o conjunto de nós seja gerado como não classificado. Como alternativa, você pode especificar o nó de ponta de trinca ou os nós de linha de trinca diretamente. Esta especificação desempenha um papel crítico para uma trinca tridimensional com uma ponta de trinca embotada.

O Abaqus/CAE não pode determinar a ponta da trinca ou a linha da trinca automaticamente com base na frente da trinca especificada. No entanto, se você selecionar um ponto para definir a frente da trinca em duas dimensões, o mesmo ponto definirá a ponta da trinca; da mesma forma, se você selecionar arestas para definir a frente da trinca em três dimensões, as mesmas arestas definirão a linha da trinca. Para todos os outros casos, você deve definir a ponta da trinca ou a linha da trinca diretamente.

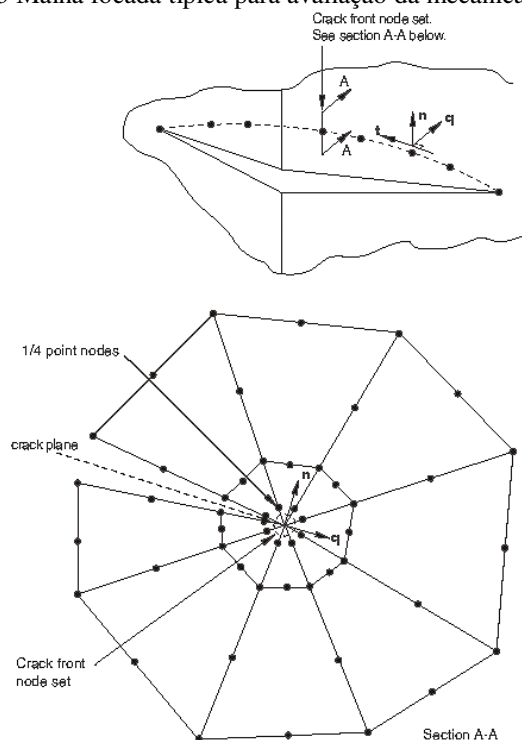
Deve-se especificar a direção da extensão da trinca virtual em cada ponta da trinca em

duas dimensões ou em cada nó ao longo da linha da trinca em três dimensões, especificando a normal ao plano da trinca, \mathbf{n} , ou a direção da extensão da trinca virtual, \mathbf{q} .

Se a direção da extensão da trinca virtual for especificada para apontar para dentro do material (paralela às faces da trinca), os valores da integral J calculados serão positivos. Valores negativos da integral J são obtidos quando a direção da extensão da trinca virtual é especificada na direção oposta.

A direção da extensão da trinca virtual pode ser definida especificando a normal, \mathbf{n} , ao plano da trinca. Nesse caso, o Abaqus/Standard calculará uma direção de extensão de trinca virtual, \mathbf{n} , que é ortogonal à tangente frontal da trinca, \mathbf{t} , e à normal, \mathbf{n} . De acordo com a Figura 25, $\mathbf{q} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ para uma trinca tridimensional; para uma trinca bidimensional, simplesmente tem $q_x = -n_y$ e $q_y = -n_x$. Especificar a normal implica que o plano da trinca é plano, pois apenas um valor de \mathbf{n} pode ser dado por integral de contorno (SIMULIA, 2022).

Figura 25 Malha focada típica para avaliação da mecânica da fratura



Fonte: Simulia (2022)

5 TENSÃO RESIDUAL EM COMPÓSITOS

As tensões residuais são tensões autoequilibradas que existem em elementos de engenharia, mesmo quando não estão sob cargas externas. Embora existam tensões residuais em muitos componentes de engenharia, devido à complexidade de sua natureza, alguns projetistas as ignoram no processo do projeto. Muitas vezes, a magnitude dessas tensões é significativa e ignorá-las nessa fase pode resultar em um projeto arriscado (SHOKRIEH, 2014)

No entanto, as tensões residuais podem ser úteis e melhorar o desempenho do componente sob condições de suporte de carga. Portanto, os métodos de determinação, medição, simulação e redução de tensões residuais são pesquisas importantes no campo da engenharia, seja civil, mecânica e de materiais. Em materiais compósitos, tensões microrresiduais são criadas durante o processo de fabricação, devido ao descompasso das características/ propriedades físicas e mecânicas da matriz e reforço. A contração da matriz após a cura também é outra fonte de tais tensões. Em compósitos laminados, as propriedades físicas e mecânicas de cada camada são funções da direção do reforço. Esta é a fonte de tensões macrorresiduais em laminados. Além disso, os processos de tratamento térmico após a fabricação, usinagem e condições ambientais, como absorção ou liberação da umidade, são algumas das outras fontes de tensões residuais (SHOKRIEH, 2021; SHOKRIEH, 2014)

Embora as tensões residuais possam ocasionalmente ser benéficas, elas geralmente são prejudiciais. Em algumas circunstâncias, podem causar deformações, distorção e instabilidade dimensional em compósitos. Experimentalmente, as observações mostram que as tensões residuais podem causar trincas na matriz. Embora esse modo de falha não seja catastrófico, trincas podem ser uma fonte perigosa de iniciação de falha; especialmente quando o corpo de prova está sob condições de carregamento cíclico. Também, o avanço da micro-trinca da matriz pode ser uma fonte de delaminação em compósitos laminados, que é um modo de falha catastrófica (SHOKRIEH, 2014).

Existem diferentes métodos experimentais para medir tensões residuais em diversos materiais. A medição de tensões residuais pode ser realizada por técnicas destrutivas, semidestrutivas e não destrutivas. Como classificação geral, esses métodos podem ser categorizados como mecânicos, ópticos, de difração e métodos de propriedades relevantes à tensão. Ao considerar os aspectos físicos e propriedades mecânicas de materiais compósitos, métodos especiais para medição de tensões residuais nestes tipos de materiais estão disponíveis. Entre diferentes técnicas de medição para medir as tensões residuais, técnicas mecânicas são as mais utilizadas por vários pesquisadores para medição de tensões residuais em compósitos

(SHOKRIEH, 2014).

Aplicação das outras técnicas para medição das tensões residuais em materiais compósitos às vezes podem ser muito difíceis ou mesmo impossíveis. Uma profunda compreensão da física e mecânica dessas tensões em compósitos ainda é necessária para encontrar técnicas adequadas para sua medição. Como já mencionado, há muitas complexidades e dificuldades no uso de algumas das técnicas experimentais para a medição de tensões residuais em compósitos e mais pesquisas também são necessárias para eliminar esses obstáculos (SHOKRIEH, 2021) .

Existem também vários métodos matemáticos (analíticos e numéricos) para cálculo de tensões residuais em materiais compósitos. Esses métodos foram desenvolvidos com base em suposições feitas no processo de cura de compósitos. A generalidade do modelo e a caracterização adequada dos materiais constituintes (reforço e matriz) desempenham papéis importantes na simulação bem-sucedida do processo. Para isso, uma caracterização precisa da matriz e das propriedades de reforço com o tempo e a temperatura são necessárias. Estudos sobre os mecanismos de geração de tensões residuais adicionais devido à interação entre materiais são uma área de pesquisa em andamento e sua influência nas tensões residuais devem ser compreendidas. Assim, há muitas perguntas sem resposta na modelagem matemática de tensões residuais que precisam ser esclarecidas por mais pesquisas. (SHOKRIEH, 2021)

Existem algumas técnicas disponíveis na literatura para redução da tensão residual. Uma delas é o tratamento térmico após o processo de cura de compósitos. Adição de nanopartículas à matriz, para reduzir o descasamento das propriedades físicas e mecânicas da matriz e do reforço (também reduzindo o comportamento de contração da matriz), é um novo método que vem sendo recentemente estudado por alguns autores. Este campo também parece atraente para futuras pesquisas (SHOKRIEH, 2021).

5.1 Efeitos da Tensão residual

As falhas de materiais compósitos estão amplamente associadas a tensões residuais. A tensão residual normal da interface fibra-matriz influencia seriamente o descolamento da fibra e arrancamento da matriz, os mecanismos de falha mais prevalentes (TABATABAEIAN; ASGHARI, 2019; LIU; ZHANG *et al.*, 1999; NATH; FENNER; GALIOTIS, 2000).

Também foi comprovado que a tensão residual também influencia algumas outras características de desempenho, incluindo trinca da matriz (SAFARABADI; SHOKRIEH, 2014; DEVE; MALONEY, 1991), tensão de escoamento (SAFARABADI; SHOKRIEH, 2014;

NAKAMURA; SURESH, 1993) e estabilidade dimensional (SAFARABADI; SHOKRIEH, 2014; JAIN; MAI, 1996).

Falhas por fadiga, fluência, desgaste, trincas por corrosão sob tensão, fratura, flambagem etc., são causadas principalmente por tensões residuais. Além disso, tensões residuais levam regularmente à instabilidade dimensional, um exemplo disso é a distorção após o tratamento térmico ou usinagem de uma peça. Em peças sem cargas externas, tensões residuais podem ser localizadas. Todos os processos de fabricação podem trazer tensões residuais e cargas correlacionadas são aumentadas com tensões residuais (PRIME, 1999a,b; SAFARABADI; SHOKRIEH, 2014).

As tensões residuais são sutis, pois compensam o equilíbrio e, assim, removem os vestígios exteriores de sua presença. É necessário estar ciente das tensões residuais em todas as estruturas de engenharia nas quais os fatores de segurança são um problema, como tensões residuais que contribuem para as falhas. Tensões residuais provocadas por diferentes processos de fabricação podem ser previstos ou modelados. Muitas pesquisas estão em andamento nesta área (PRIME, 1999a,b; WATT, 2020).

As descargas de tensões residuais causam deformações, sejam elas imperceptíveis, que levam à formação de uma trinca em um simples vaso de barro ou à agitação da Terra por um grande terremoto que causa grande destruição. É geralmente muito difícil prever falhas resultantes de tensões residuais. A existência de tensões residuais tem um efeito significativo na integridade dos componentes em funcionamento, em circunstâncias como um reator nuclear por um longo período de tempo, ou em sistemas de alta sensibilidade à segurança, como um avião. A existência de tensões residuais de tração próximas à superfície é considerada um dos principais fatores contribuintes que levam à formação lenta e contínua de trincas em partes de objetos expostos à radiação (SHOKRIEH, 2014).

5.2 Tensões residuais em materiais compósitos

A tensão residual afeta a formação de trincas superficiais e altera o caminho e a extensão de uma trinca abaixo da superfície. A primeira razão para isso é que a tensão de compressão abaixo da superfície em todos os casos equilibra a tensão de tração próxima à superfície. Assim, retarda significativamente o crescimento de uma trinca quando atinge a região de tensão de compressão. A segunda razão é que, com a extensão da fissura, a rigidez ou complacência da área muda, resultando na liberação da carga anteriormente aprisionada (SHOKRIEH, 2014). Um exemplo do primeiro caso seria uma fissura superficial, que é exposta à tensão uniaxial.

Tal trinca aumentará e se infiltrará em uma placa, pois sua largura atinge um tamanho de quase quatro vezes a sua espessura (RAJU; NEWMAN, 1979). No entanto, uma trinca carregada pela mesma pressão externa de cima, com uma tensão residual considerável abaixo de sua superfície, se estenderá mais rapidamente na superfície, com uma relação largura/profundidade maior que dez. Consequentemente, a trinca levará mais tempo para penetrar no objeto, apesar de o componente continuar a perder força com a extensão da fissura na superfície. (TABATABAEIAN; GHASEMI *et al.*, 2021; FINNIE *et al.*, 1990).

É comum que as peças fiquem deformadas, pois durante o processo de fabricação e sua compreensão disso são indicadores de até que ponto os engenheiros são experientes (PRIME, 1999a,b; TABATABAEIAN; GHASEMI *et al.*, 2021). Análises mecânicas e medição de tensões residuais sob diferentes circunstâncias aumentaram substancialmente nosso conhecimento sobre tensões residuais ao longo do século passado, permitindo-nos avaliar e aumentar a integridade dos atuais componentes. O comportamento de materiais e componentes é crucialmente afetado pela existência de tensões residuais (SHOKRIEH, 2014).

5.3 A importância da medição de tensão residual

Atualmente, com o aumento do uso de compósitos laminados avançados, nota-se considerável interesse em relação às tensões residuais geradas durante a fabricação. Compreender essas tensões residuais tornou-se um tema altamente intrigante para a comunidade científica, definindo as falhas que podem ocorrer no material caso venham a ser desconsideradas no processo de fabricação (SÁNCHEZ CRUZ; CARRILLO; ALMEIDA, 2016; WANG, 2021; GHASEMI; MOHAMMADI-FESHARAKI, 2017). Embora seja desafiador obter medições confiáveis e prever as tensões residuais, a distribuição e o tamanho delas são elementos críticos na definição do comportamento de um compósito (JIANG, 2021).

As tensões residuais que se desenvolvem através das condições de fabricação e operação não podem ser negligenciadas. Elas podem comprometer significativamente a resistência de um laminado. Se essas tensões não são compreendidas com precisão, podem resultar em falhas de material onde as tensões de tração desenvolvidas na matriz ultrapassam sua tração crítica. A formação de microfissuras em outras estruturas expõe as fibras a condições ambientais possivelmente degradantes e possíveis ataques em instalações de armazenamento (JIANG, 2021; MYERS, 2004). Essas tensões são geralmente pequenas; no entanto, podem ser comparadas com as geradas por cargas mecânicas devido às baixas tensões impostas pelos códigos de projeto. Assim, se as tensões residuais não são levadas em conta, o estado de tensão

geral é deturpado, aumentando potencialmente o risco de falhas relacionadas à trinca assistida ambientalmente (JIANG, 2021; REID; PASKARAMOORTHY, 2009).

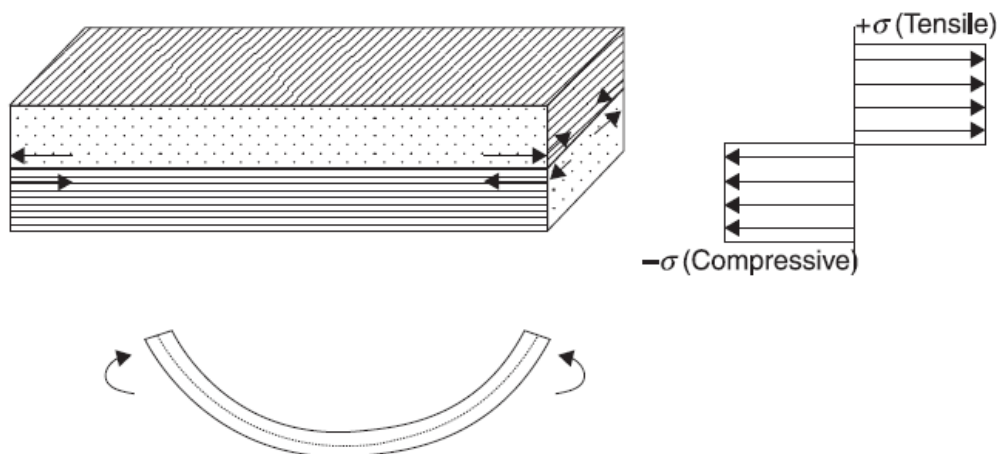
O estado de tensão residual deve ser sobreposto a qualquer estado de tensão resultante do carregamento externo, a fim de estimar o estado de tensão real existente quando uma estrutura sofre carregamento externo. Quando a tensão geral supera o projeto limite de tensão do material, essa tensão combinada pode acarretar falha. Assim, é importante avaliar as tensões residuais para prever o modo de falha de um compósito (SEIF; SHORT, 2002; SEIF *et al.*, 2006; TABATABAEIAN; GHASEMI, *et al.*, 2021). Se as tensões residuais não são levadas em conta durante toda a fase de projeto estrutural, um maior fator de segurança deve ser considerado para a estrutura, geralmente resultando em excesso de peso e estruturas superprojetadas (STAMATOPOULOS, 2011).

5.4 Macrotensões residuais

Tensões residuais macromecânicas ou de laminação estão presentes em uma camada escala devido à diferença nas direções do material de cada lâmina de compósito laminados (KIM; MAI, 1998). Durante o resfriamento da temperatura de cura para a temperatura ambiente dentro de um laminado, a deformação de uma lâmina é restringida pelas outras camadas com diferentes orientações de fibra. Assim, as tensões residuais são construídas em cada camada. Consequentemente, as camadas estão sob tensão e compressão e, portanto, cargas térmicas são induzidas. Por exemplo, nas lâminas cruzadas nos compósitos, as fibras de 90° impõem uma restrição mecânica nas fibras em 0° durante o resfriamento e vice-versa, devido às diferenças na retração térmica de direções (HARRIS, 1999).

A Figura 26 mostra como é desenvolvida a tensão residual em laminado compósito. Esse esquema foi desenvolvido por Li *et al.* (1997), que observaram regiões de tração e compressão de laminado com duas camadas.

Figura 26 Vista esquemática da formação de tensão residual e vista frontal da deformação fora do plano em laminado de camada cruzada desbalanceada. M: momento fletor



Fonte: Li *et al.* (1997)

A Figura 26 mostra que as fibras de 90° estão sob compressão, enquanto as fibras de 0° sofrem tração. A retração anisotrópica assemelha-se ao comportamento de uma lâmina bimetálica, se desbalanceada e irrestrita, e a curvatura do laminado pode ser o resultado (SHOKRIEH; KAMALI, 2005).

Parâmetros que influenciam a magnitude das tensões macrorresiduais de um laminado estão listados a seguir:

- diferença de temperatura (entre as temperaturas de cura e ambiente);
- fração volumétrica da fibra;
- ondulação da fibra;
- condição de processamento (taxa de cura e resfriamento);
- espessura e orientação das fibras de cada camada do laminado;
- sequência de laminação;
- coeficiente de expansão térmica de cada camada no longitudinal e direções transversais;
- propriedades mecânicas no eixo de cada camada.

As tensões residuais aumentam à medida que a temperatura se afasta da temperatura ambiente. Considerando a fração volumétrica da fibra, algumas conclusões foram obtidas na literatura. Descobriu-se que para frações de volume de fibra mais altas, as lâminas macrorresiduais foram menores (WAGNER; NAIRN, 1997). Um volume de fibra ótimo pode existir quando o laminado é submetido a cargas externas (JONES, 1999). Para compósitos *cross-ply*, afirmou-se que o resíduo interlaminar aumentam com o aumento da fração de volume da fibra (WANG; KOWALIK; CHUNG, 2004).

5.5 Métodos numéricos

Embora as expressões analíticas sejam preferidas em muitos casos, a busca por maior precisão requer a implementação de análise numérica. Geralmente, métodos numéricos incluem FEM, método das diferenças finitas (FDM) e Método dos elementos de contorno — *boundary element method* (BEM). Para prever as tensões micro e macrorresiduais, o método FE é mais útil em comparação com os outros dois métodos. Diversos modelos de elementos finitos, como modelos de células unitárias de matrizes quadradas e hexagonais, com diferentes condições de contorno, foram considerados em publicações anteriores (GUO, 2018; JAFARPOUR; FARAHANI; HAGHIGHI-YAZDI, 2019; FEDULOV; BONDARCHUK; FEDORENKO, 2022).

Alguns métodos experimentais são simulados usando FEM e FDM. Por exemplo, no Estudo de Lei Yang *et al.* (2019), o módulo de elasticidade do compósito de carbono/epóxi em ambiente e temperatura criogênica. Os parâmetros medidos do material dependentes da temperatura foram usados como a entrada de um modelo micromecânico de elementos finitos 3D de compósito de matriz polimérica reforçada com fibra (Figura 27), considerando distribuição aleatória de fibras. As propriedades longitudinais e transversais do módulo de elasticidade do compósito carbono/epóxi são previstas pelo presente modelo, com boas concordâncias entre os resultados previstos e experimentais. Então as tensões residuais do compósito de carbono/epóxi devido à temperatura criogênica são previstas por este modelo. Descobriu-se que a alta tensão residual ocorre na matriz entre duas fibras adjacentes. A tensão residual longitudinal é compressiva nas fibras, mas tração na matriz. A tensão transversal das fibras é principalmente compressiva, e há tração transversal e compressão comparáveis na tensão na matriz. A tensão residual máxima no compósito é a tensão de tração longitudinal na matriz (YANG; LI *et al.*, 2019).

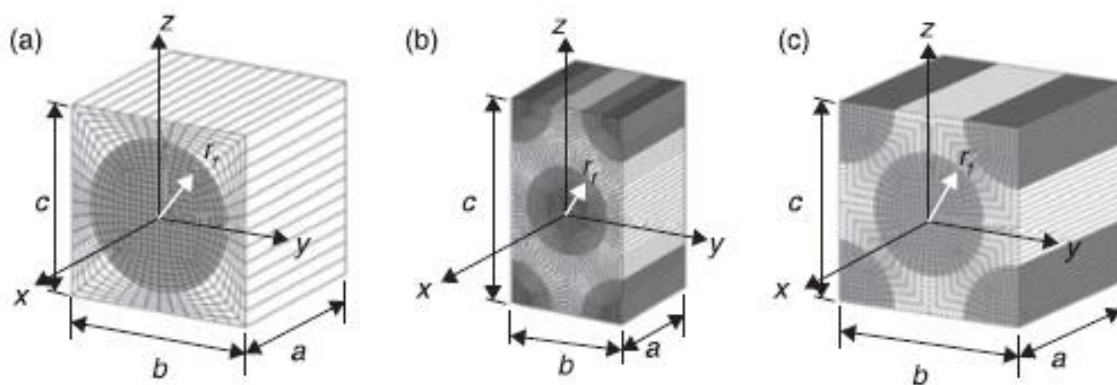
Figura 27 Modelo micromecânico de elementos finitos 3D de compósito de matriz polimérica reforçada com fibra



Fonte: Lei Yang *et al.* (2019).

Outros modelos numéricos foram criados para estudar a interação das fibras com a matriz, como é possível notar na pesquisa de Kho-Kook *et al.*, (2008) no qual provém modelos do tipo arranjo quadrado, hexagonal (Figura 28).

Figura 28 Modelo de elementos finitos de arranjos de fibras regulares; r : raio das fibras; (a) arranjo quadrado; (b) arranjo hexagonal; (c) arranjo de diamante

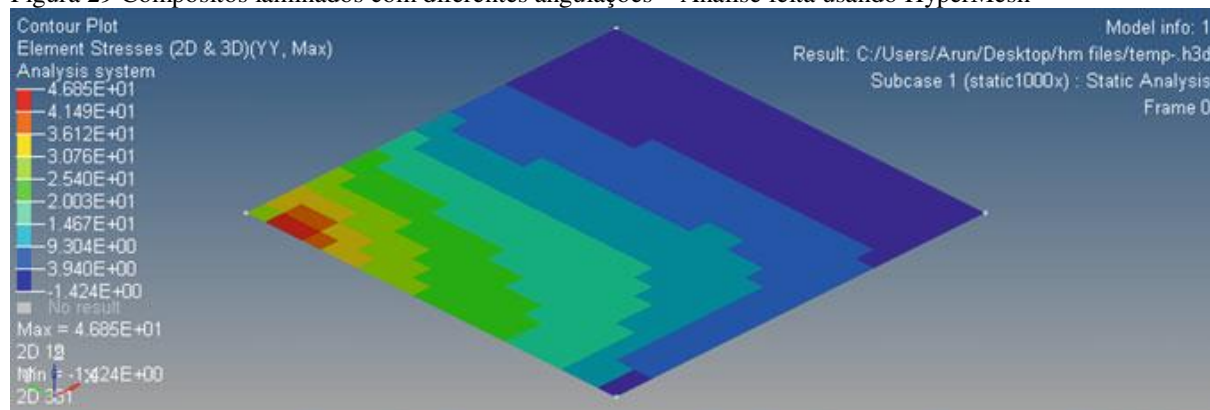


Fonte: Kho-Kook *et al.* (2008).

Krishna *et al.* (2019) estudaram compósitos laminados com diferentes angulações de 30° , 45° , 60° e 90° . A análise é feita usando *HyperMesh* (Figura 29). Os resultados concluem que as camadas compósitas colocadas na superfície superior proporcionam os menores valores de tensões residuais nas direções X e Y quando a camada é posicionada a 30° , enquanto a superfície superior desenvolve valores mínimos de tensões residuais para a direção XY quando

a camada é colocada a 45° na superfície superior.

Figura 29 Compósitos laminados com diferentes angulações – Análise feita usando HyperMesh

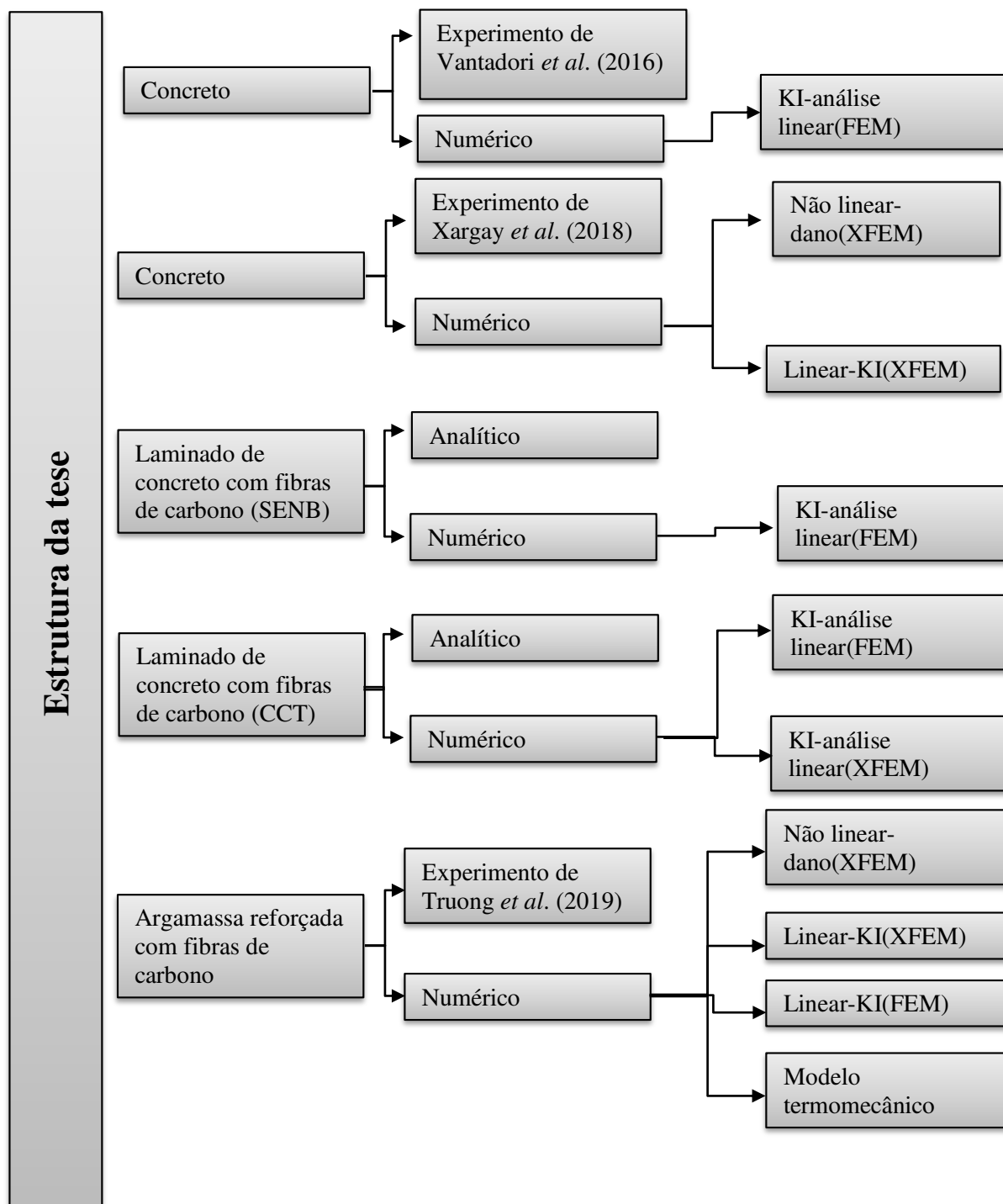


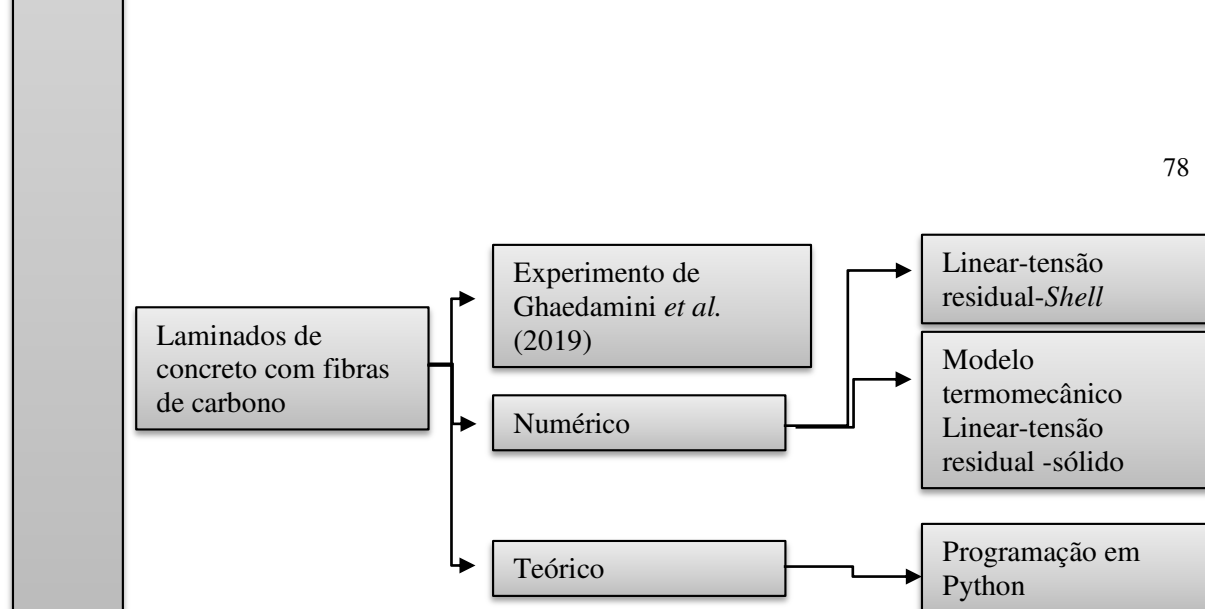
Fonte: Krishna *et al.* (2019).

6 MATERIAIS E MÉTODOS

Os modelos numéricos criados nesta tese foram elaborados a partir de modelos experimentais obtidos pelos autores Vantadori *et al.* (2016), Xargay *et al.* (2018), Truong *et al.* (2019), Ghaedamini *et al.* (2019) em que foram calibrados, sendo assim validados (Figura 30). Após essa calibração e validação, fez-se o estudo sobre mecânica da fratura e dano dos materiais de matriz cimentícia reforçada com fibras de carbono. Nesse caso, objetivando a obtenção do fator de intensidade de tensão e o processo de dano no modelo numérico usando FEM e XFEM.

Figura 30 Estrutura de estudo da tese



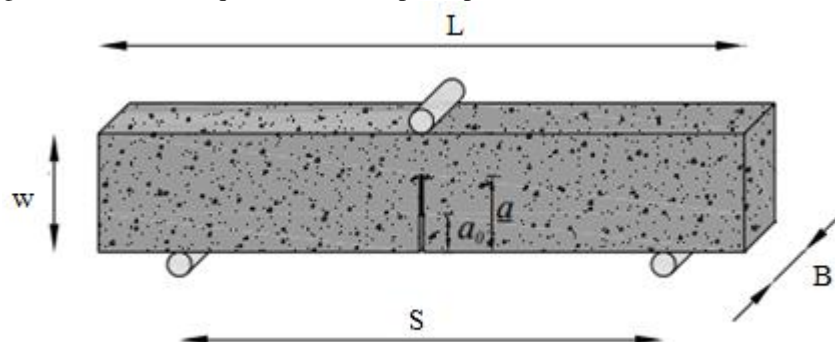


Fonte: Autor

6.1 Modelo - calibração do modelo numérico e validação para determinação do fator de intensidade de tensão

Para validação do modelo numérico de concreto, utilizou-se o experimento de Vantadori *et al.* (2016) em que utilizaram um corpo de prova para determinação da tenacidade à fratura de concreto. O estudo menciona o uso de uma matriz cimentícia com as seguintes proporções: cimento: água: agregados (por peso) = 1: 0,7: 3,6. Essa mistura apresenta uma resistência à compressão de 30 MPa aos 28 dias. Dois tipos de corpos de prova foram testados: de concreto simples e reforçado com fibras. A Figura 31 mostra o desenho esquemático do corpo de prova.

Figura 31 Desenho esquemático do corpo de prova dos Vantadori *et al.*(2016)



Fonte: Vantadori *et al.*(2016)

A equação utilizada por Vantadori *et al.*(2016) para calcular a tenacidade à fratura do concreto é a seguinte: o fator crítico de intensidade de tensão do Modo I, K_{IC} é calculado empregando-se o valor medido do pico de carga, $P_{máx}$, como segue (TADA *et al.*, 2000)-equações (47) e (48):

$$K_{IC}^S = \frac{3P_{max}}{2W^2} \frac{S}{B} \sqrt{\pi a} f(\alpha) \quad (47)$$

Onde,

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(2.15 - 3.93\alpha + 2.70\alpha^2)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \quad (48)$$

Com $\alpha = \frac{a}{W}$

Onde:

Pmax- carga de pico;

S – Vão de carregamento do corpo de prova;

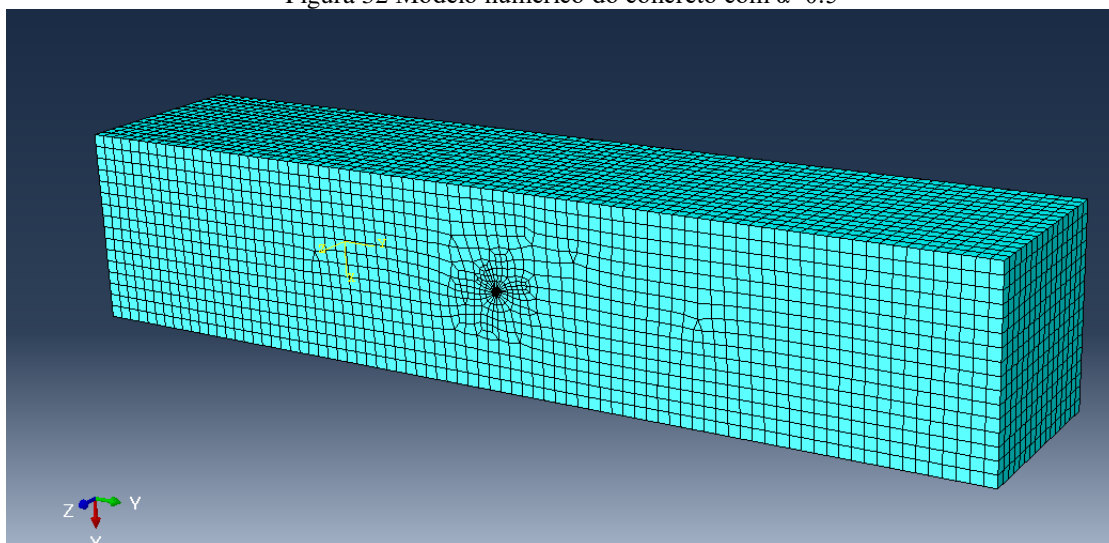
a – Comprimento crítico efetivo da fissura;

α – Comprimento relativo da trinca;

W – Profundidade do corpo de prova.

As dimensões em mm adotadas pelos autores foram: W= 40, S=160, B=40, L=200. De posse de todas as informações, calculou-se a tenacidade à fratura e assim obteve-se o valor da tenacidade à fratura experimental. Sabe-se que o fator de intensidade de tensão crítica é a tenacidade à fratura. Além disso, conforme os estudos sobre a tenacidade e a fratura do concreto, sabe-se que a dimensão do corpo de prova influencia diretamente nessa propriedade do material.

Com relação à determinação do fator de intensidade de tensão, usou-se o método FEM. A Figura 32 mostra o modelo tridimensional do compósito com entalhe em uma das bordas. O tipo de análise estrutural usado é estática. A técnica para análise de convergência foi a mesma do item [6.2.3.2](#)(será apresentado posteriormente).

Figura 32 Modelo numérico do concreto com $\alpha=0.5$ 

Fonte: Autor

6.2 Modelo – concreto

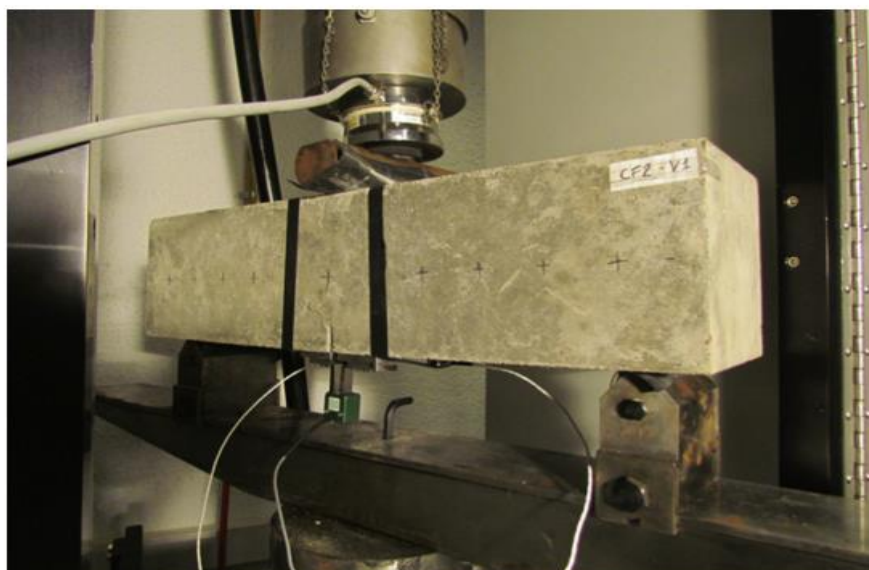
6.2.1 Modelo numérico de dano do concreto usando XFEM

Para validar o modelo usando XFEM, utilizou-se o modelo experimental proposto por Xargay *et al.* (2018), que foi realizado conforme a RILEM (Figura 33). Os autores do referido estudo analisaram o efeito da temperatura no comportamento mecânico de concreto de alta resistência autoadensável, tanto simples quanto reforçado com fibras, quando submetido a três diferentes caminhos de tensão, correspondentes aos testes de compressão uniaxial e flexão em três pontos. Os experimentos foram realizados em condições residuais. Além do caso de temperatura ambiente, duas temperaturas diferentes foram consideradas na fase preliminar de aquecimento em forno elétrico, a saber, 300°C e 600°C.

Tanto o concreto simples quanto o reforçado com fibras foram usados com uma combinação híbrida de fibras de aço e polipropileno no último caso. Trinta dias após o tratamento térmico, as amostras de concreto foram submetidas aos testes mecânicos até a falha. Uma conclusão relevante neste trabalho é que a adição de fibras à matriz cimentícia melhora a capacidade de liberação de energia de fratura do concreto não apenas sob condição de temperatura ambiente, mas também sob temperatura moderada e alta. Essa evidência, que é válida para todos os diferentes testes considerados, é uma consequência da contribuição das fibras para a integridade geral da amostra muito além do pico. O trabalho inclui uma análise detalhada dos processos de falha sob os diferentes cenários de carga considerados, a evolução das deformações volumétricas sob compressão uniaxial, imagens SEM concreto simples tratado termicamente e a discussão da degradação causada pela temperatura nas diferentes propriedades

mecânicas.

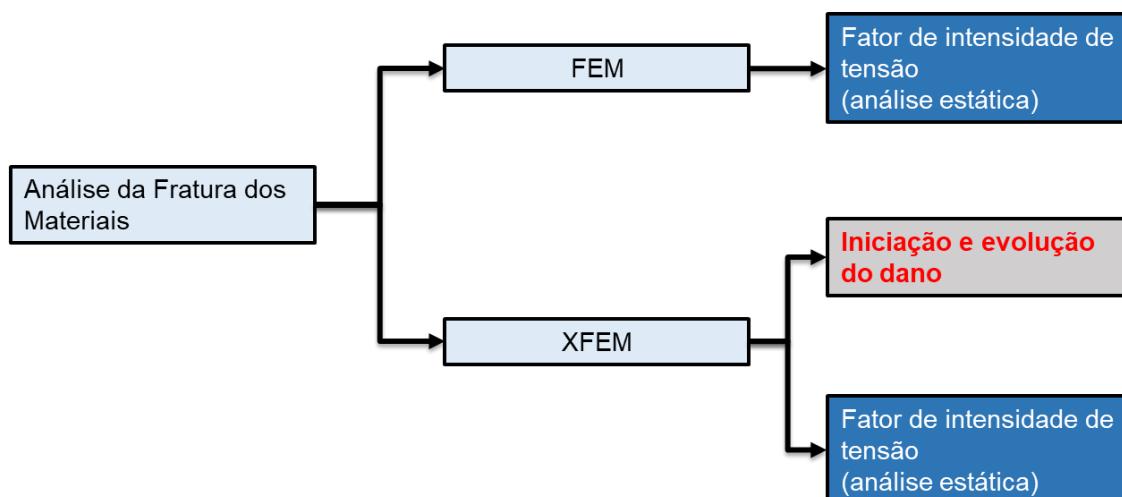
Figura 33 Ensaio de três pontos para determinação do CMOD



Fonte: Xargay *et al.* (2018)

A modelagem numérica no ABAQUS para estudo da mecânica da fratura e dano segue duas frentes principais conforme fluxograma na Figura 34.

Figura 34 Fluxograma de como analisar a fratura dos materiais no Abaqus

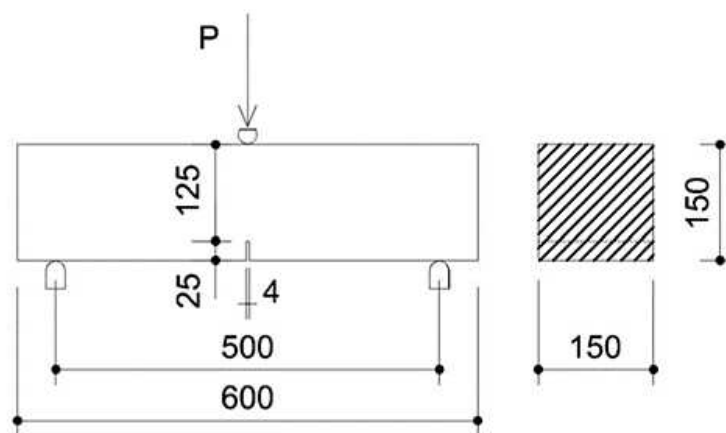


Fonte: Autor.

Conforme informado anteriormente, os materiais usados foram dos estudos de Xargay *et al.* (2018), que apresentou módulo de elasticidade de 40 GPa e coeficiente de Poisson de 0.37. A geometria do corpo de prova usado foi de 150 x 150 x 600 mm, entalhe de 25 mm e distância entre apoios de 500 mm. Considerou-se o concreto no modelo numérico como material isotrópico e homogêneo. A Figura 35 mostra o desenho esquemático do modelo com

dimensões em mm.

Figura 35 Desenho esquemático do modelo de Xargay *et al.* (2018)

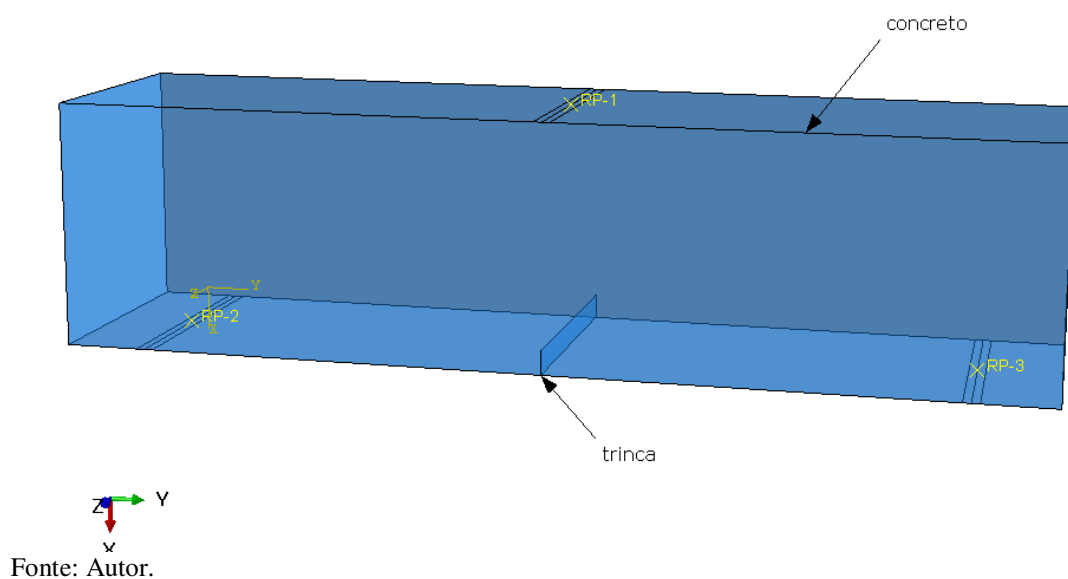


Fonte: Xargay *et al.* (2018)

De posse dos dados de entrada e geometria do corpo de prova, realizou-se a calibração do modelo e validação. Dois tipos de modelos foram propostos: um modelo de dano do concreto usando XFEM e um modelo para determinação do fator de intensidade de tensão, também empregando o XFEM. No entanto, no segundo caso, empregou-se análise estática, pois o fator de intensidade de tensão deve ser obtido na região linear elástica.

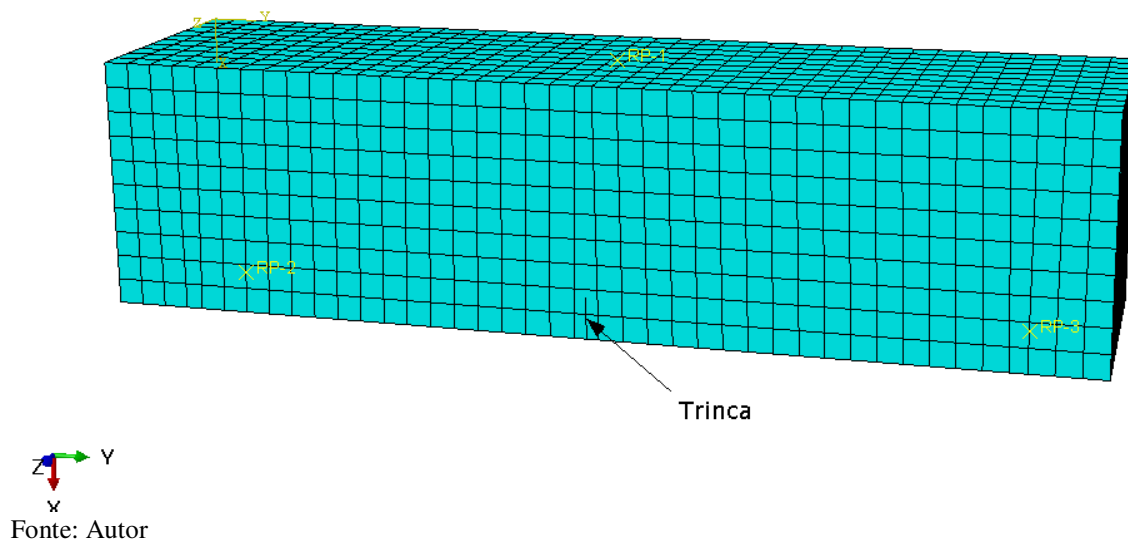
No primeiro modelo, modelo de dano do concreto, considerou-se a propagação da trinca quando alcançada a tensão máxima principal e deslocamento na falha (Figura 36). Os seguintes passos foram seguidos para obtenção do modelo numérico: criação das partes, geometria do corpo de prova e a geometria da trinca. Com relação ao modelo de dano, utilizaram-se elementos do tipo *Hex*, estrutural, ordem geométrica linear, integração reduzida, controle de distorção, *element deletion* (quando um elemento finito no modelo XFEM atinge um determinado nível de dano, ele pode ser excluído do modelo para representar a falha do material). Resumidamente, C3D8R: *An 8-node linear brick, reduced integration, hourglass control*. Considerou-se uma taxa de deslocamento de 0.32mm/s. No campo de interações adotou-se a abertura da trinca usando XFEM no início (permitir crescimento da trinca). As condições de contorno foram consideradas apoios (limitação corpo rígido) e na região de RP-1(indica o local de referência central de aplicação do carregamento) da Figura 36 considerou-se acoplamento.

Figura 36 Modelo para análise de dano no concreto



Para análise de convergência do modelo numérico, adotou-se as seguintes malhas 30, 20, 15 mm, comparando-as com o resultado experimental. A Figura 37 mostra o modelo com a malha de 15 mm.

Figura 37 Malha do modelo numérico com as dimensões da RILEM (malha de 15 mm)

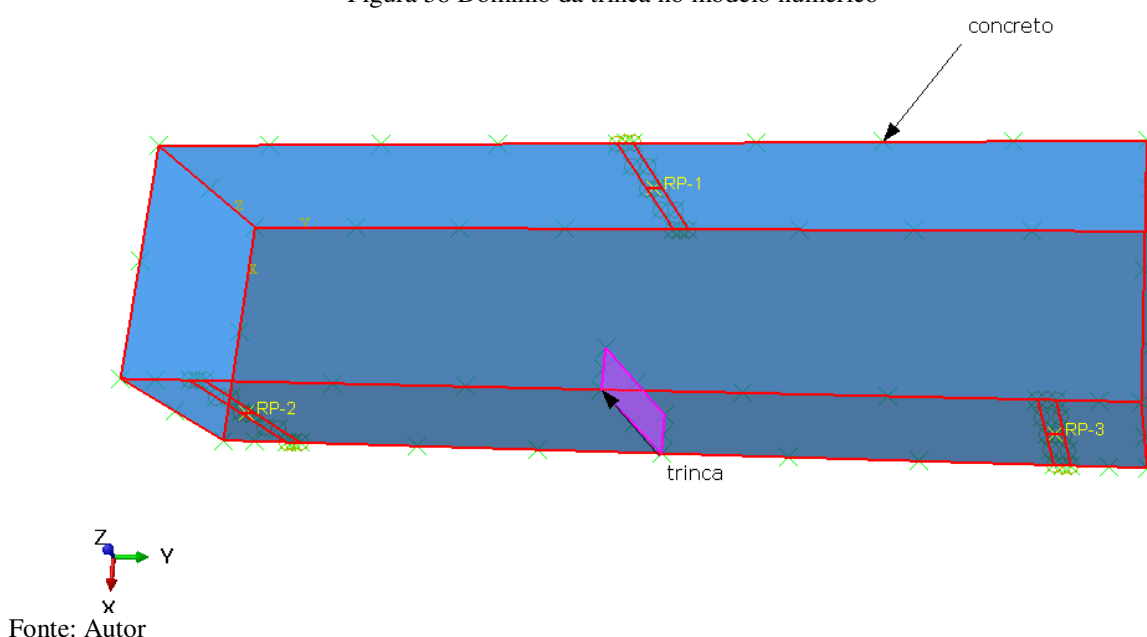


Além disso, considerou-se a abertura da trinca no modelo numérico comparando com o CMOD do modelo experimental de Xargay *et al.* (2018). No caso, o modelo de dano escolhido foi linear (no ABAQUS existem três tipos: linear, tabular e exponencial).

6.2.2 Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão

Para o modelo de determinação do fator de intensidade de tensão, mantiveram-se os mesmos parâmetros usados para o modelo de dano, no entanto, desconsiderou-se a deformação plástica e não permitiu o crescimento da trinca, pois esse tipo de análise é estática. A Figura 38 mostra o domínio do XFEM, e a região colorida mostra a região da trinca, indicada pela seta inferior. Em ambas as simulações considerou-se uma simplificação das regiões de apoios (desconsiderou-se o atrito), isso simplifica a análise e aumenta a velocidade de simulação.

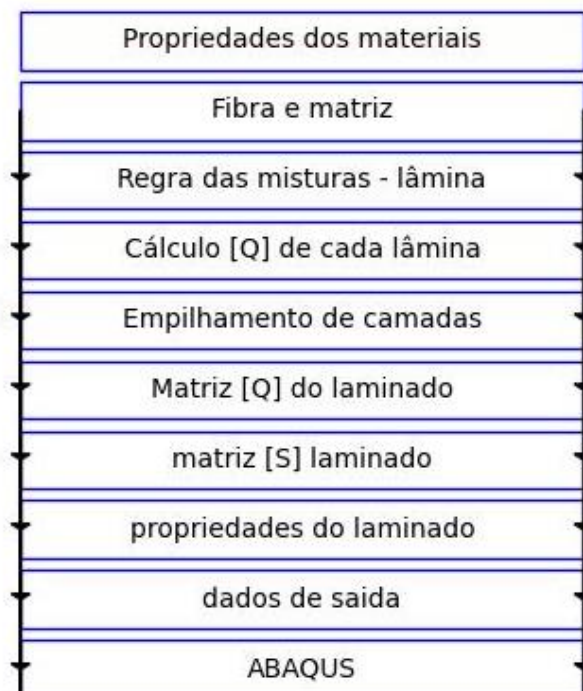
Figura 38 Domínio da trinca no modelo numérico



6.3 Modelo analítico e numérico para laminados de matriz cimentícia e fibras sintéticas

O fluxograma da Figura 39 mostra as etapas seguidas para a análise do laminado. As propriedades do laminado simétrico foram obtidas pela teoria do laminado. O KI foi calculado analítica e numericamente.

Figura 39 Fluxo das etapas da análise de compósitos

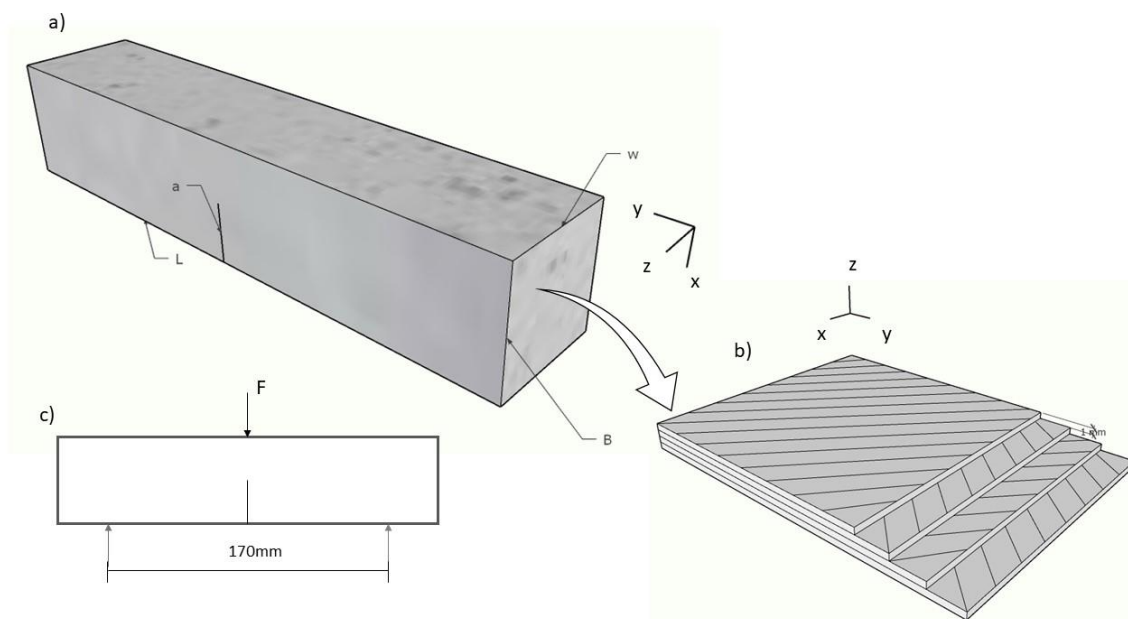


Fonte: Autor

Utilizou-se corpo de prova com entalhe de borda única – entalhe de 20 mm – conforme mostrado na Figura 40. O laminado apresentou 40 camadas onde cada uma possui 1 mm. Um suporte foi considerado um apoio de primeiro e um de segundo gênero com distância entre 170 mm. Um carregamento estático foi aplicado no meio da amostra. Um aderência micromecânica entre fibras/matriz foi considerado perfeito para análise analítica de acordo com a teoria dos laminados. O mecanismo de transferência de tensão de ligação na interface foi perfeito.

Com relação à simulação para determinação do fator de intensidade de tensão, adotou-se a geometria do laminado com 40×40×200mm, conforme Figura 40a, onde são mostrados a profundidade/espessura da placa (B), Largura (W), comprimento do entalhe (a), comprimento (L). A Figura 40b é uma parte da seção laminada do laminado e a Figura 40c é a representação esquemática dos métodos de teste para o Modo I puro.

Figura 40 A geometria do laminado (a) parte da seção do laminado (b) Modo puro I (c)



Fonte: Autor

As propriedades do concreto e da fibra de carbono foram obtidas através dos estudos de (GAWIL, 2016; LIU; GUO *et al.*, 2020). A fibra de carbono com diâmetro de $7,3 \mu\text{m}$ foi utilizada neste estudo, cujo módulo de elasticidade é 231 GPa, resistência à tração é 4558 MPa, alongamento na ruptura é 2,05 % e densidade é 1820 kg/m^3 . O Módulo de elasticidade do Concreto, E é de 26,1 GPa; A resistência à compressão é de 32 MPa, o coeficiente de Poisson é de 0,25, a resistência à tração é de 3,5 MPa. São os valores médios das amostras.

As propriedades do laminado de concreto/fibras de carbono foram obtidas através da regra de mistura com uma fração volumétrica de 1 % de fibras. A regra das Misturas permite estimar os módulos de elasticidade E1 e E2 de uma lâmina com reforço unidirecional, a partir dos módulos de elasticidade e das frações volumétricas das fibras e da matriz. A partir da teoria do laminado, o laminado apresentou S_{ij} (flexibilidade de parâmetros) que será utilizado para calcular ρ . (mede parâmetros de ortotropia de material plano) e Y (ρ) (parâmetro de correção de ortotropia de material).

As propriedades da lâmina composta paralela e perpendicular à direção de carregamento (paralela e perpendicular aos eixos geométricos da placa) para diferentes orientações das fibras são obtidas usando as seguintes relações de transformação (BARBERO, 2017).

6.3.1 Modelo analítico para determinação do fator de intensidade de tensão em corpo de prova com geometria tipo SENB

O método analítico é usado para determinar o fator de intensidade de tensão modo I para uma amostra de placa de trinca de aresta única (BARBERO, 2017; EL-HAJJAR; HAJ-ALI, 2015). O cálculo do fator de intensidade de tensão para as configurações do laminado de concreto foi obtido pelas soluções, com a seguinte forma (Equação 49-52).

$$KI = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) Y \quad (49)$$

Onde P=Carga aplicada (N);

f (a/w) = função de geometria adimensional;

B = Profundidade/espessura da placa (mm);

Largura (mm);

Comprimento da trinca (mm);

Comprimento (mm);

Y (p) = Parâmetro de correção da ortotropia do material;

p = Mede os parâmetros da ortotropia do material plano;

Sij = Compliance.

$$\rho = \frac{2S_{11} + S_{66}}{2\sqrt{S_{11}S_{22}}}. \quad (50)$$

$$Y(\rho) = \frac{[1 + (0,1(\rho - 1) - 0,016(\rho - 1^2) + 0,002(\rho - 1^3))]}{\left(\frac{1 + \rho}{2}\right)^{1/4}} \quad (51)$$

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{3\left(\frac{S}{W}\right)\sqrt{a/W}}{2\left(1 + 2\left(\frac{a}{W}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{a}{W}\right)^{3/2}\right)} \left[1,99 - \frac{a}{W}\left(1 - \frac{a}{W}\right)\left\{2,15 - 3,93\left(\frac{a}{W}\right) + \left(\frac{a}{W}\right)^2\right\}\right] \quad (52)$$

Uma tensão $\sigma(2)$ de 0.25 MPa foi considerado, sabe-se que $\sigma(x);\sigma(y);\sigma(xy) = [T-(\theta)]*\sigma(1);\sigma(2);\sigma(12)$ (teoria dos laminados). Para essa análise, MATLAB foi usado e criou-se um programa para calcular o Fator de intensidade de Tensão para cada configuração do laminado.

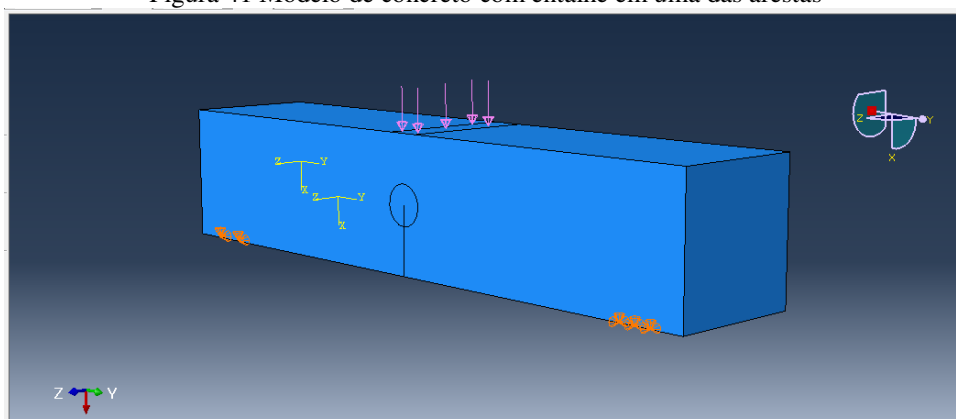
6.3.2 Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão em corpo de prova com geometria tipo SENB

O software comercial ABAUS/CAE realizou a simulação numérica do laminado. O laminado apresentou 40 camadas onde cada uma possui 1 mm. As propriedades de cada lâmina foram obtidas através da regra de misturas, e a simulação considera a interação perfeita entre fibra e matriz. Essa simulação assumiu as seguintes simplificações: existe uma ligação perfeita entre as fibras e a matriz. Ambas as fibras e a matriz se comportam como materiais linearmente elásticos e a matriz está livre de vazios.

As camadas de cada laminado variam na orientação $[(\pm 15)_{10}]_s, [(\pm 25)_{10}]_s, [(\pm 35)_{10}]_s, [(\pm 45)_{10}]_s, [(\pm 55)_{10}]_s, [(\pm 65)_{10}]_s, [(\pm 75)_{10}]_s$. Foi utilizado corpo de prova com entalhe de aresta única de 20 mm (Figura 41). Tensão estática de 0,25 MPa (teoria do laminado) aplicada ao corpo de ensaio foi considerada de acordo com a Figura 41. As condições de contorno adotadas foram: um suporte considerado um apoio de primeiro gênero e de segundo.

A Figura 41 mostra o modelo tridimensional do compósito com entalhe em uma das bordas. O tipo de análise estrutural usado é o modelo de análise estática. O início do comprimento do entalhe e o final da trinca única é 0,25 como um parâmetro do nó do meio, e é selecionado o lado do elemento colapsado, nós duplicados. A malha deformada ao redor da ponta da trinca, *Wedge Element Shape*, foi usada. Além disso, adotou-se no Abaqus um método de interação integral (J).

Figura 41 Modelo de concreto com entalhe em uma das arestas



Fonte: Autor

Devido à deformação da malha na ponta da trinca, a forma do elemento de cunha foi usada. O software ABAQUS identifica elementos quadrados e os analisa como elementos quadrados degenerados. Outro ponto é que usando a geometria do modelo 3D é difícil obter a

malha para varrer a singularidade e então varrer de uma face para outra. Portanto, deve haver um elemento ao longo do comprimento da linha na região circular. Há uma varredura na malha; um número de elemento desta linha é atribuído em um lado conforme a trinca se propaga para o outro lado.

Um tipo de elemento quadrático selecionado foi atribuído como integração reduzida de ordem geométrica C3D20 (um bloco de elemento tetraedro quadrático de 20 nós e o tamanho da malha (pontos de integração 3x3x3)). Para a malha fora da região da ponta da trinca, foi utilizado o formato Hex. A técnica escolhida foi a varredura e o algoritmo do eixo medial. A configuração “teia de aranha” é a mais indicada para problemas que envolvem trinca, pois esse desenho de malha é mais eficiente na região da ponta da trinca. Esta configuração consiste em anéis concêntricos de elementos em quatro lados localizados na região da ponta da trinca. O anel fechado é formado por elementos quadrangulares degenerados em triângulos.

A análise de convergência foi realizada seguindo os métodos de Henshell; Shaw, (1978) e Blandford (1981) para a simulação de determinação do fator de intensidade de tensão. De acordo com o método, os campos de tensão e deslocamento mudam em função do raio da ponta da trinca. Quando R tende a 0 ($r \rightarrow 0$), ocorre a singularidade. Essa análise usou círculos na ponta da trinca com raio: 6 mm, 5 mm, 4 mm, 3 mm, 2 mm e 1 mm. O número de elementos na ponta da trinca variou de 10 a 30. Além disso, alterou-se o número de elementos na região externa da trinca.

6.4 Modelo - teórico e numérico determinação no fator de intensidade de tensão usando FEM x XFEM em corpo de prova com geometria tipo Center-Cracked Tension (CCT)

Com relação à modelagem da geometria *Center-Cracked Tension (CCT)* seguiram-se as seguintes etapas: cálculos das propriedades de uma lâmina através da regra de mistura, e posteriormente, estimativas das propriedades do laminado através da teoria dos laminados. Finalmente, o fator de intensidade de tensão foi calculado analiticamente e comparado com modelos numéricos usando FEM e XFEM.

Três modelos foram usados, um modelo 3D também usando FEM, um modelo 3D usando XFEM e um analítico. O uso de XFEM no ABAQUS é limitado a elementos 3D para esse tipo de análise. A análise ocorreu da seguinte forma: cada ângulo de trinca corresponde a um ângulo de fibra, onde fibras a 75° seriam analisadas com ângulo de trinca de 15°. Todas as configurações são mostradas na Tabela 4.

Tabela 4 Configuração laminado e ângulo de trinca

Configuração do laminado	Ângulo da trinca
$[(0/\pm 15)_4]_s$	75°
$[(0/\pm 30)_4]_s$	60°
$[(0/\pm 45)_4]_s$	45°
$[(0/\pm 60)_4]_s$	30°
$[(0/\pm 75)_4]_s$	15°

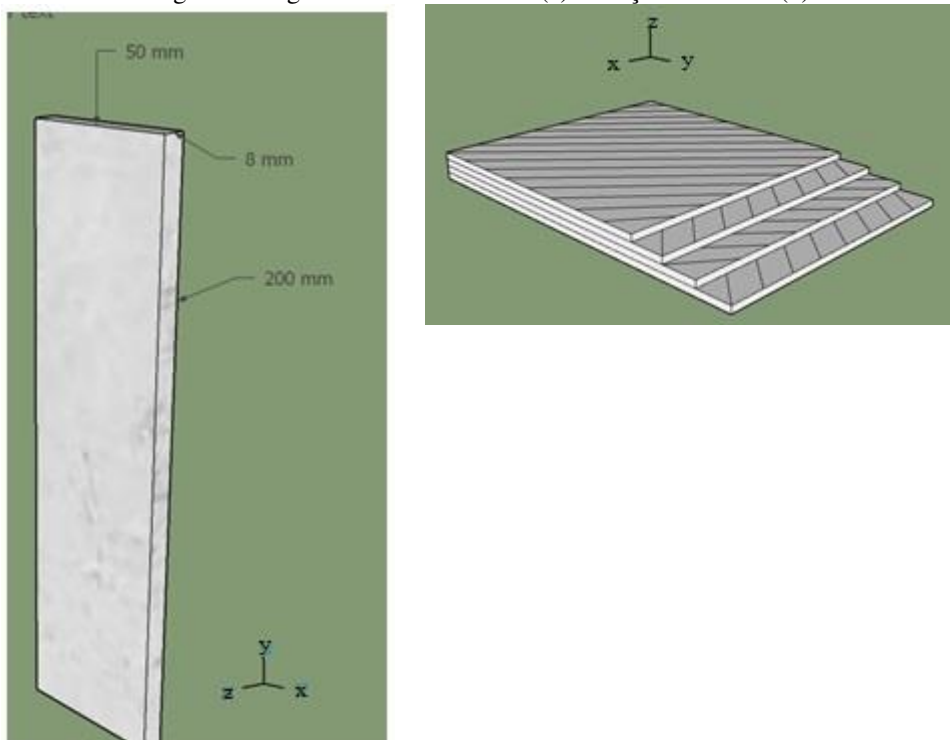
Fonte: Autor

Neste estudo, tanto o ângulo da fibra como o ângulo da trinca variaram no compósito. Assim, é possível avaliar a efeito da orientação das fibras e da trinca no fator de intensidade de tensão. A amostra analisada tem as seguintes dimensões: 200×50 mm e uma espessura de 8mm. O tamanho da trinca adotado foi de 1 mm. As condições de contorno adotadas foram restrição em x, y e z na parte inferior, e livre na parte superior onde foi aplicada uma tensão de tração de 3 MPa. Além disso, usou-se as mesmas propriedades da simulação do corpo de prova tipo SENB.

Considerou-se uma matriz homogênea, linear e isotrópica para análise do cálculo. A regra das misturas pode ser usada para estimar os módulos de elasticidade de uma lâmina com reforço unidirecional, a partir do módulo de elasticidade e as frações volumétricas das fibras e matriz usadas para obter as propriedades laminadas compostas por carbono fibra/concreto-1% fração volumétrica de fibras.

As propriedades da lâmina tanto na direção paralela quanto perpendicular ao carregamento podem ser obtidas através de relações de transformação para diferentes orientações de fibra (BARBERO, 2017). A geometria do laminado foi definida como 8×50×200 mm conforme a Figura 42, onde a profundidade/espessura da placa (B), Largura (W), comprimento do entalhe (a) e comprimento (L) são mostrados. A Figura 42b é uma parte de uma seção laminada do laminado.

Figura 42 A geometria do laminado (a) da seção laminado (b)



Fonte: Autor

6.4.1 Teoria para determinação do fator de intensidade de tensão – *Center-Cracked Tension (CCT)*

A geometria e as condições de contorno da placa são as seguintes: a placa é retangular e tem dimensões $L \times W$. Ela é engastada em uma das bordas e uma carga uniforme q é aplicada a ela. A largura da placa em relação ao tamanho da trinca (w/a) é 50.

$$KI = \sigma \cos^2 \beta \sqrt{\pi a} \quad (53)$$

A solução analítica para uma placa com os SIFs definidos para os modos I de fratura está disponível em (BROEK, 1982) – equação (53). Essa solução envolve um ângulo de trinca, β , com o eixo horizontal. Para essa análise foi utilizada a linguagem Python, criando um programa para calcular o fator de intensidade de tensão de cada configuração de laminado.

6.4.2 Modelo numérico para determinação do fator de intensidade – *Center-Cracked Tension (CCT)*

No caso da geometria CCT, analisou-se o fator de intensidade de tensão tanto usando FEM como XFEM e comparou-se com o modelo analítico. O software comercial ABAQUS/CAE foi utilizado para simular numericamente o laminado. O laminado consistia em 8 camadas; cada uma tinha 1 mm de espessura. A regra das misturas foi utilizada para obter as propriedades de cada lâmina. A simulação considera perfeita interação entre a fibra e a matriz.

Essa simulação assumiu que as fibras e a matriz estavam perfeitamente ligadas, que ambos os materiais se comportavam linearmente e que a matriz não tinha vazios.

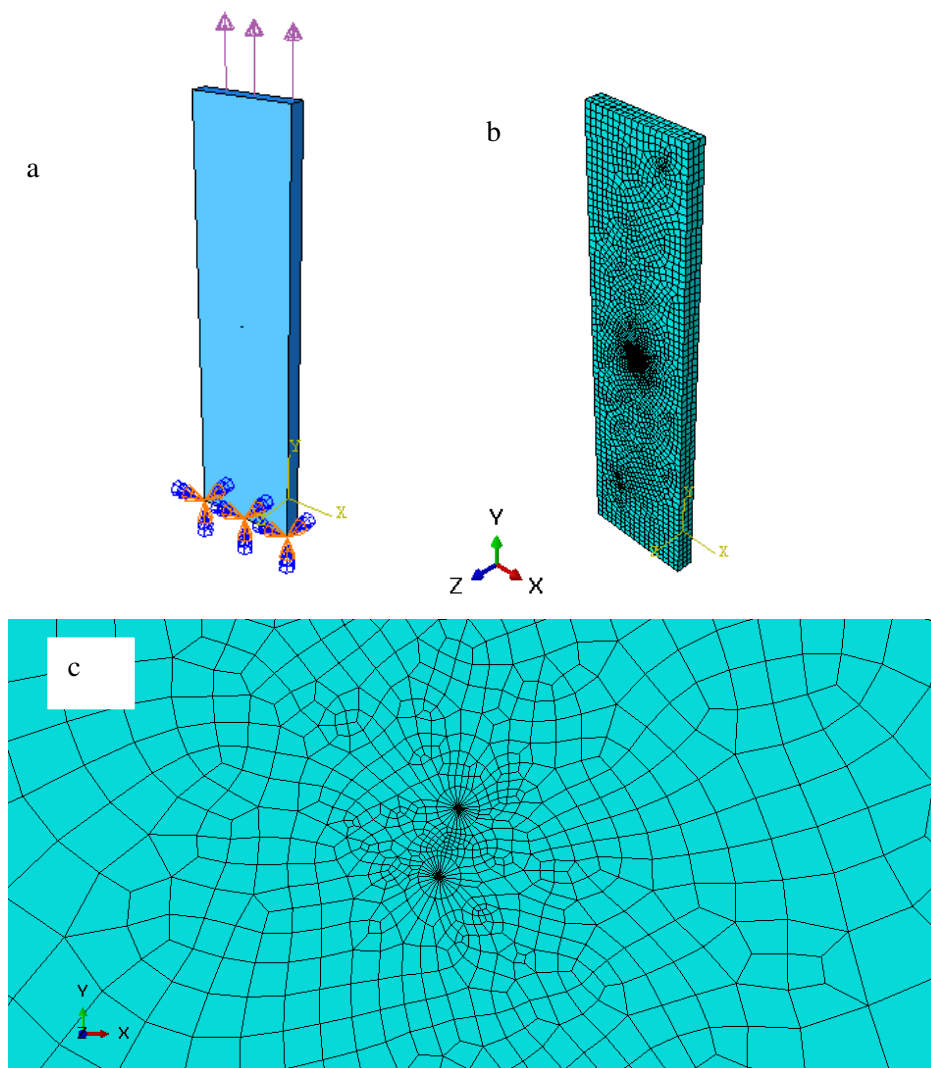
As camadas de cada laminado variam em orientação $[(0/\pm 15)_4]_s$, $[(0/\pm 30)_4]_s$, $[(0/\pm 45)_4]_s$, $[(0/\pm 60)_4]_s$, $[(0/\pm 75)_4]_s$. A geometria da amostra de *Center-Cracked Tension (CCT)* com um entalhe de 1 mm foi usada na Figura 43. A tensão estática de 3 MPa (teoria do laminado) aplicada ao corpo de prova foi considerada conforme a Figura 43. O limite às condições adotadas foram: um suporte considerado engastado e o outro livre. A figura mostra um modelo 3D de um composto com um entalhe. O tipo de análise estrutural utilizada é a análise estática. O início do comprimento do entalhe e o final da única rachadura são ambos os parâmetros do nó do meio do tipo 0,25. O lado do elemento recolhido são nós duplicados. Foi utilizada a malha deformada ao redor da ponta da trinca, *Wedge Element Shape*. Isso foi feito para adotar o Abaqus, um método de interação integral (J).

Na análise numérica usando FEM, a malha usada no software ABAQUS não consegue capturar com precisão a deformação na ponta da trinca, então a cunha elemento foi usada em seu lugar. Isso permitiu uma representação mais precisa da deformação da ponta da trinca. Adicionalmente, usando uma geometria de amostra 3D é difícil obter a malha para varrer a singularidade e depois varrer de uma face para outra. Assim, a região circular deve ter um elemento ao longo do comprimento da linha. Um formato hexagonal (C3D8R: *node linear brick*, integração reduzida) foi usado para a malha fora da ponta da região da trinca. A técnica escolhida foi o *Sweep* e o *advanced front algorithm*. Isso permitiu uma análise mais precisa da reconstrução do modelo. Para a região da ponta da trinca foi a cunha de forma de elemento C3D6: Uma triangular linear de 6 nós prismas. A técnica na região da ponta da trinca foi a *Sweep*. A configuração “teia de aranha” é a malha mais eficiente de dimensionamento para problemas envolvendo trincas, pois é mais eficaz na região ao redor da ponta da trinca. Esta configuração consiste em uma série de anéis concêntricos de elementos localizados em quatro lados na região da ponta da trinca. O anel fechado é formado por elementos quadrangulares que

se degeneram em triângulos.

A Figura 43 mostra o modelo construído no Abaqus. Nela há a representação do carregamento uniforme e das restrições(engaste) na região inferior do corpo de prova; a Figura 43b mostra o aspecto da malha; e a Figura 43c mostra a ampliação da região da ponta da trinca no modelo.

Figura 43 A geometria do modelo em Abaqus FEM (a) malha do modelo (b) ampliação da trinca no modelo (c)



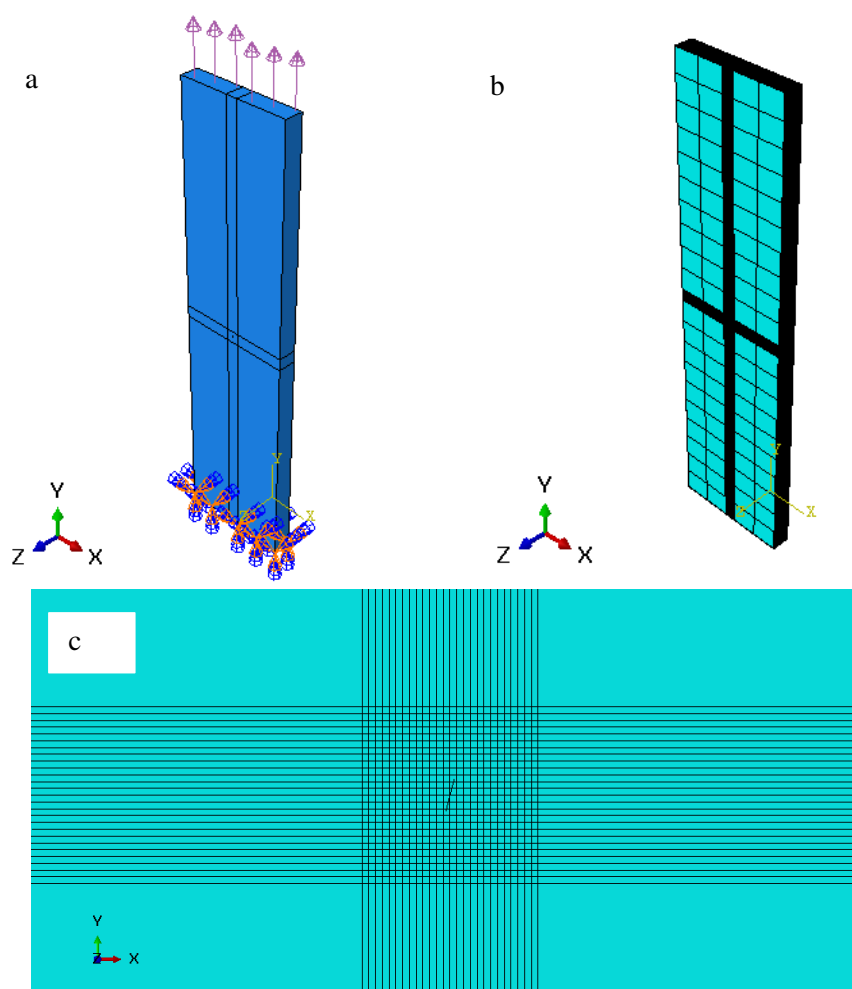
Fonte: Autor

Problemas de malha de convergência são geralmente resolvidos aumentando o número de elementos na malha, ou seja, a discretização do problema. Outra forma de resolver esse tipo de problema é aumentar a precisão do método numérico usado. Na análise numérica com XFEM, foram usados elementos sólidos 3D, e a análise foi estática. O ABAQUS, em sua versão ABAQUS/CAE-3DExperienceR2017x, não calcula o fator de intensidade de tensão para material ortotrópico; por isso, o módulo de elasticidade em E_y foi utilizado para análise. As

dimensões do modelo foram as mesmas para a Análise 3D do laminado usando FEM.

A criação do modelo XFEM seguiu as seguintes etapas: criação do elemento sólido 3D, aplicação de propriedades mecânicas, condições de contorno, aplicação de carga e criação da malha. A Figura 44 mostra o modelo criado no Abaqus para o laminado. Para facilitar a criação da trinca central da malha, foi feita uma região quadrada central onde o número de elementos na região central foi alterado — utilizou-se a ferramenta de célula de partição. A ampliação mostra a malha refinada na região central onde está localizada a trinca.

Figura 44 A geometria do modelo em Abaqus XFEM (a) malha do modelo (b) ampliação da trinca no modelo (c)



Fonte: Autor

Para a análise(FEM) usando a geometria CCT, utilizaram-se círculos na ponta da trinca com raio de 0,9 mm, 0,8 mm, 0,7 mm, 0,6 mm, 0,5 mm, 0,4 mm, 0,35 mm, 0,3 mm, e 0,2 mm. O número de elementos na ponta da trinca varia de 10 a 26. Além disso, mudou o número de elementos na região externa da trinca, variando de 10 mm a 2 mm. Para a análise de convergência do modelo XFEM, conforme mencionado anteriormente, existe uma região

quadrada no centro do modelo onde foi realizada a troca de malha nesta região — responsável por localizar a trinca. Os tamanhos de malha usados nesta região foram: 1 mm, 0,9 mm, 0,8 mm, 0,6 mm, 0,5 mm e 0,4 mm. A malha da região externa foi mantida constantemente.

6.5 Modelo – Argamassa reforçada com fibras de carbono

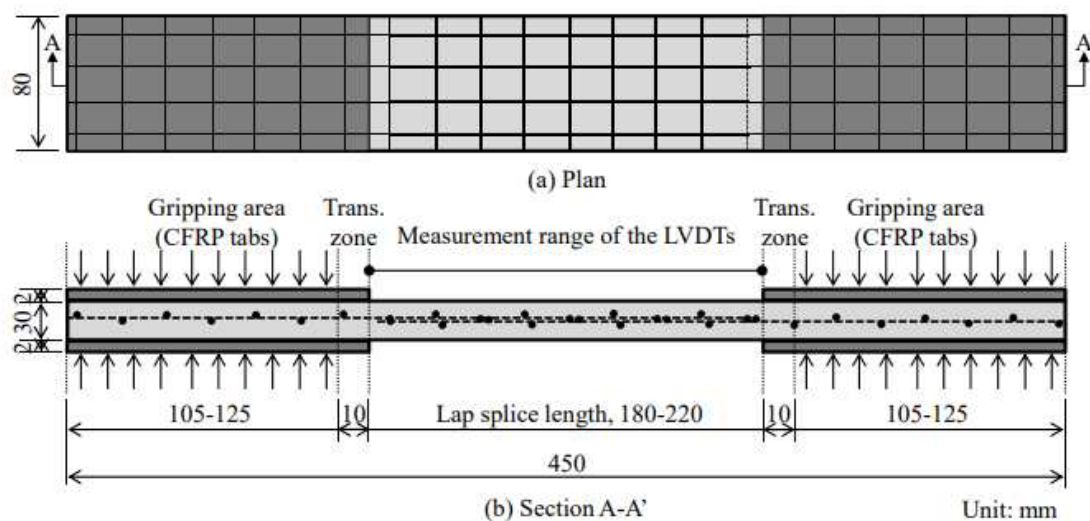
6.5.1 Modelo numérico de dano (análise não linear)

O modelo adotado para este estudo numérico foi calibrado pelo modelo experimental realizado por Truong *et al.* (2019) em que estudaram o comportamento à tração de compósitos de argamassa reforçada têxtil (MRT) confeccionados com tecido de fibra de carbono e argamassa cimentícia. Foram testados três tratamentos superficiais e três comprimentos de emenda *lap*. Os compósitos TRM também foram expostos a altas temperaturas de 250°C e 350°C. Os resultados mostraram que o tratamento superficial melhorou o pico de força e a deformação máxima, mas a exposição a altas temperaturas reduziu as respostas à tração.

A partir desse estudo, criou-se o modelo numérico, onde adotaram-se elementos sólidos para argamassa, considerando material linear elástico e elementos do tipo C3D8R. Já para a discretização das fibras adotaram-se elementos tipo T3D2. Além disso, considerou-se área equivalente, pois na situação real a seção é basicamente retangular, então empregou-se uma equivalência para seção circular, para utilização dos elementos fio no abaqus, em que é necessário entrar com a área da seção do material, o procedimento para a simulação foi dinâmico implícito.

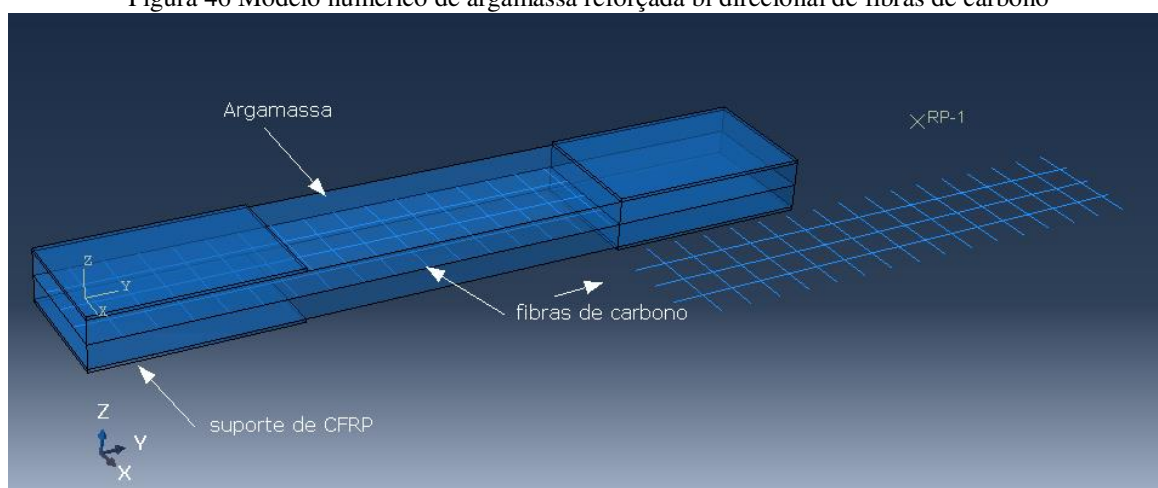
Para a calibração do modelo, adotou-se XFEM, pois representa melhor o dano do material. Após o início da falha, os seguintes parâmetros foram adotados: deslocamento na falha, tensão máxima principal do material e domínio de falha em todo o material. A Figura 45 refere-se ao modelo experimental de Truong *et al.* (2019), já a imagem da Figura 46 apresenta o modelo numérico proposto pelo autor da tese, em que é possível observar como estão dispostas as fibras bi direcionais dentro da matriz cimentícia.

Figura 45 Detalhe do corpo de prova de compósito de matriz cimentícia com fibras bidirecionais de fibras de carbono



Fonte: Truong *et al.* (2019)

Figura 46 Modelo numérico de argamassa reforçada bi direcional de fibras de carbono



Fonte: Autor

Os dados de entrada no abaqus estão presentes na Tabela 5

Tabela 5 Dados de entrada no Abaqus para o modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono

Material	E (GPa)	ν	Deslocamento na falha(mm)	Tensão máxima Principal (MPa)	Densidade kg/m ³
Matriz	5.7	0.12	0.001	2	2273
fibra de carbono	230	0.256	0.554	3	1750
CRFP	135	0.3	-	-	1600

Fontes: Małek *et al.* (2021); Minus, Kumar (2005); Homsí, Noels (2017); Cakiroglu *et al.* (2020); Truong *et al.* (2019).

6.5.2 *Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão (análise linear)*

Para a análise da influência no fator de intensidade de tensão, utilizaram-se os dados experimentais de Truong *et al.* (2019). Com o modelo calibrado, trincas foram inseridas ao modelo com o objetivo de determinar o fator de intensidade de tensão desse material, e assim avaliar a interferência de uma descontinuidade forte. Os seguintes ângulos de trinca foram utilizados: 15°, 30°, 45°, 60°, 75°. Para modelagem numérica, adotou-se FEM e XFEM para determinação do K_I do material. No caso do modelo numérico desse tipo de material, vale ressaltar que somente material elástico linear pode ser usado com os elementos dentro de um domínio de contorno para o cálculo dos fatores K (fator de intensidade de tensão).

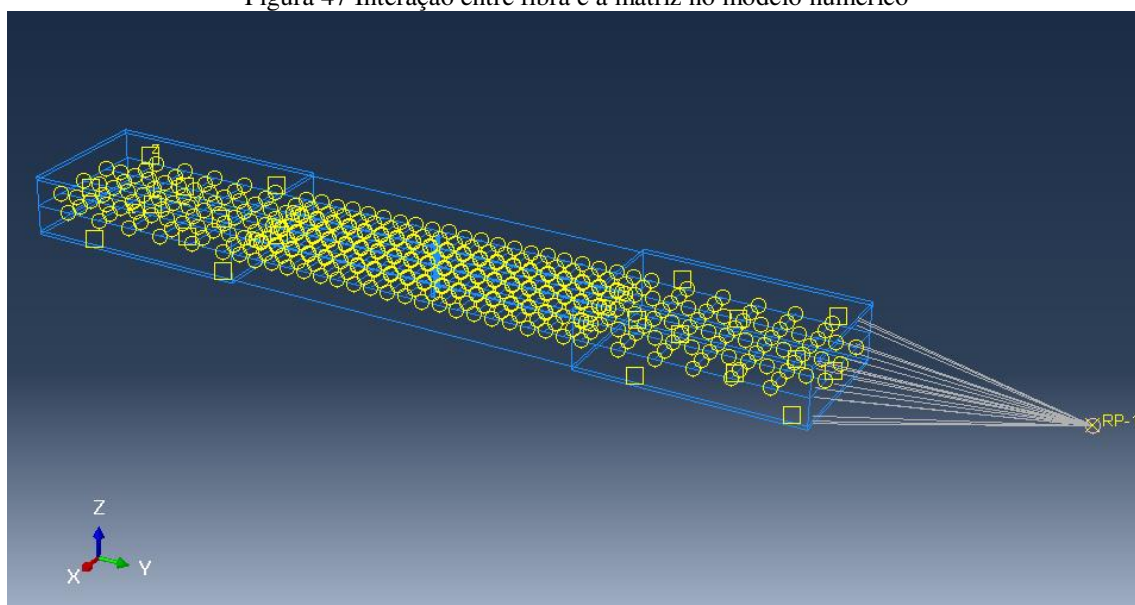
Para criação desse modelo numérico, as seguintes etapas foram seguidas: criação da geometria do modelo, *input* das propriedades dos materiais, conjunto, criação dos passos, interação, carregamento, malha e análise. Com relação à criação das partes, criaram-se as partes separadas tanto da matriz como das fibras. As propriedades foram inseridas separadamente para construção do compósito de matriz cimentícia, reforçada com fibras de carbono bidirecionais. Posteriormente, criou-se a trinca no modelo usando a ferramenta partição de células no abaqus, para assim obter a trinca ao longo da espessura do material. O mesmo procedimento foi realizado para a criação dos anéis ao redor da ponta da trinca.

As fibras foram criadas com a forma modelo espacial 3D, tipo deformável, de linhas, tipo plana. Considerou-se uma área equivalente, já que para inserir no ABAQUS a forma é circular. Além disso, criou-se o suporte que iria ser posicionado nas regiões das extremidades do corpo de prova. A interação adotada para o suporte e a matriz cimentícia foi de contato de superfície com superfície.

Para a interação entre a fibra e a matriz, adotou-se uma região incorporada e uma região hospedeira, com uma tolerância de arredondamento do fator de peso de 1E-006. A Figura 47 mostra a interação entre a matriz e as fibras de carbono. Os círculos em amarelo mostram os pontos de contato entre a matriz e as fibras.

Para criação da trinca, utilizou-se o tipo de interação especial com extensão da trinca do tipo vetorial (ponto inicial 0,0,0 e ponto final 1,0,0). Para trinca número 1 e para trinca número 2 o vetor correspondente foi ponto inicial (0,0,0) e ponto final (-1,0,0). Com relação à singularidade, adotou-se parâmetro de nó intermediário de 0,25.

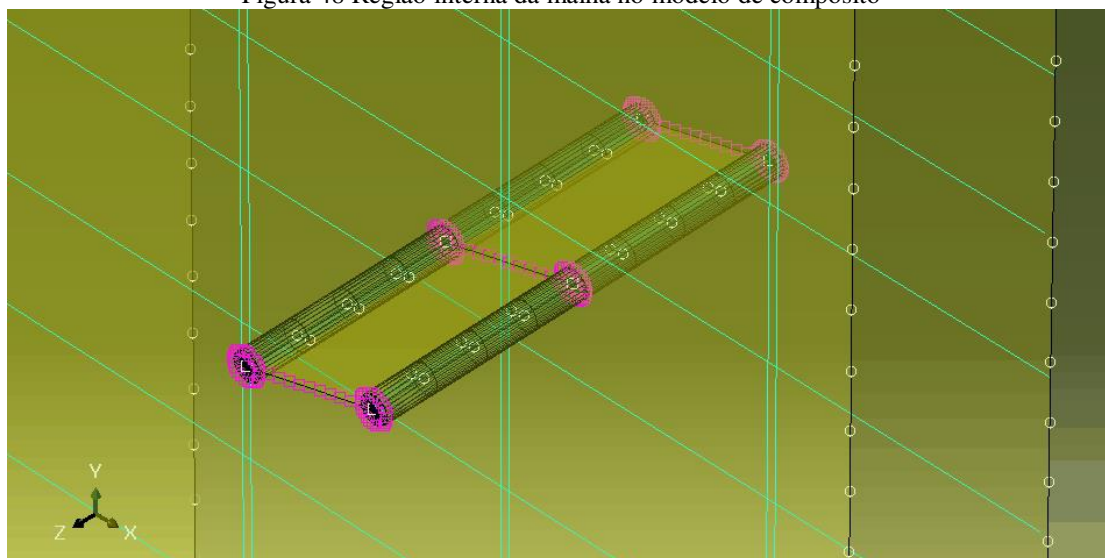
Figura 47 Interação entre fibra e a matriz no modelo numérico



Fonte: Autor

No caso da criação da malha, dois tipos de elementos foram definidos: um para a região externa ao círculo e outro para a região interna, como pode ser visto na Figura 48. No caso da região interna, os elementos do *wedge* foram utilizados. Na região externa utilizou-se os elementos do tipo HEX.

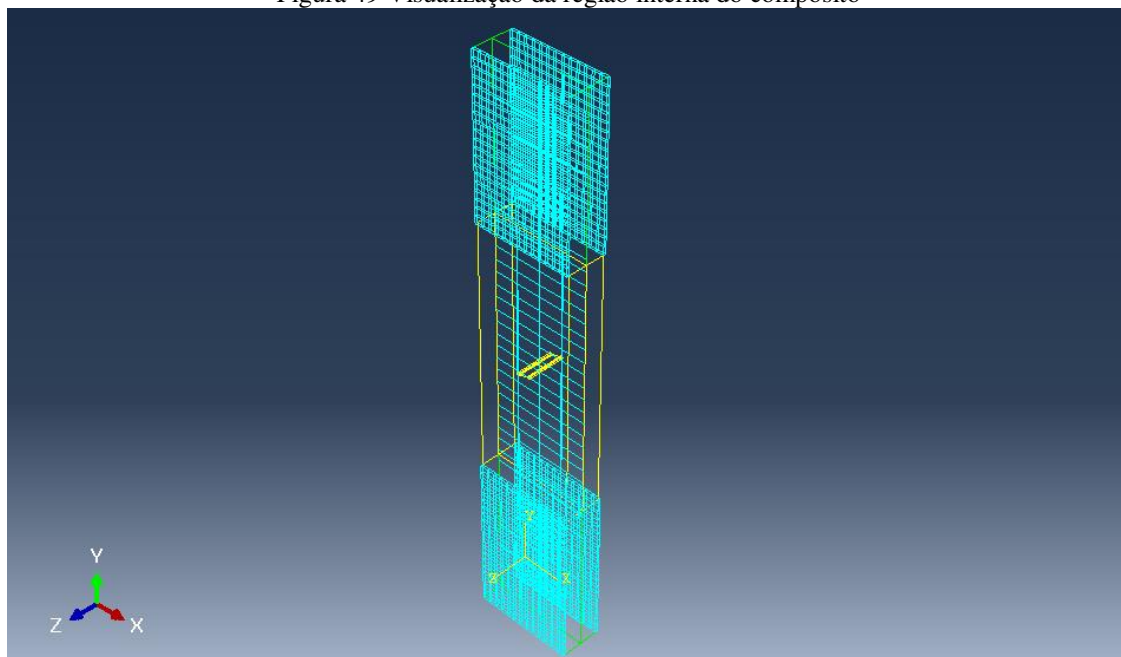
Figura 48 Região interna da malha no modelo de compósito



Fonte: Autor

A Figura 49 mostra a malha do modelo considerando a trinca no centro. Nota-se que a trinca passa pela matriz sem interferir nas fibras. Isso é um fato a ser observado ao iniciar a análise.

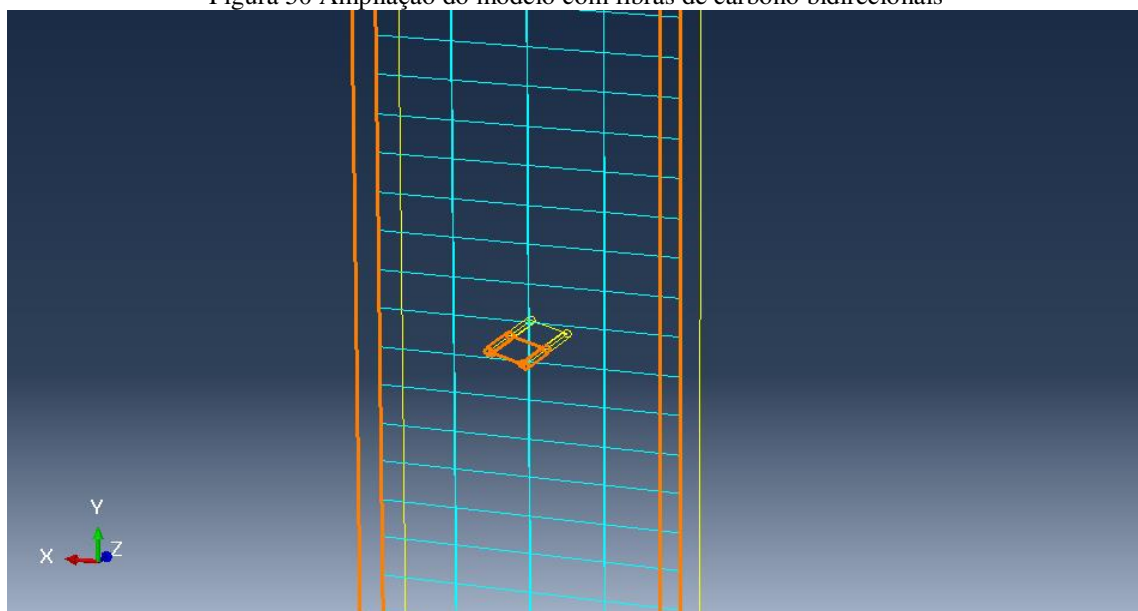
Figura 49 Visualização da região interna do compósito



Fonte: Autor.

Na Figura 50, há a ampliação da região onde está localizada a trinca no compósito.

Figura 50 Ampliação do modelo com fibras de carbono bidirecionais



Fonte: Autor.

6.5.3 Modelo termomecânico para determinação fator de intensidade de tensão, *CMOD* e temperatura (análise linear)

Para analisar a influência da temperatura no fator de intensidade de tensão, foi necessário criar um modelo termomecânico desacoplado, onde há, primeiramente, a análise térmica e posteriormente a análise mecânica. Logo, o modelo térmico do material que irá ser submetido às condições de contorno foi conforme o experimento realizado por Truong *et al.* (2019). Nesse experimento, o material foi submetido às seguintes temperaturas: 20 °C, 250 °C e 350 °C.

Nesse sentido, o modelo numérico criado possibilitará uma relação entre a abertura da trinca, temperatura e o fator de intensidade de tensão no compósito bidirecional de matriz cimentícia, reforçado com fibras de carbono. A trinca será posicionada na região lateral do corpo de prova. Nesse tipo de análise pode ser utilizado tanto o método FEM como o XFEM. O resultado das outras análises mostraram que utilizar o FEM com integral de contorno integral J a visualização do campo de tensões é melhor visualizada. Em ambas as análises não há uma mudança significativa no valor do fator de intensidade de tensão do material.

Para a análise do fator de intensidade de tensão da argamassa reforçada com fibras de carbono em função da temperatura, criou-se um modelo numérico termomecânico baseado no modelo experimental estudado por Truong *et al.* (2019). O fluxograma da Figura 51 mostra a sequência de modelos para análise termomecânica (modelo desacoplado).

Figura 51 Fluxograma para análise termomecânica de modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono



Fonte: Autor

Como o modelo criado no item anterior, fez-se a mudança da posição da trinca, das condições de contorno e do tipo de elemento para análise térmica. Os seguintes passos foram adotados: as propriedades térmicas dos materiais foram inseridas (condutividade térmica, coeficiente de expansão térmica, massa específica e calor específico), passo transferência de calor (transitória), no campo predefinido considerou-se constante através das regiões fibra e argamassa na temperatura inicial de 20°C, condições de contorno do tipo temperatura-uniforme, família de elementos de transferência de calor, ordem geométrica linear, DC3D8: *An 8-node linear heat transfer brick*. Com relação à técnica da inserção da trinca seguiu-se a mesma do modelo anterior para determinar o fator de intensidade de tensão usando FEM.

Os dados de entrada usados no modelo térmico estão indicados Tabela 6. Ressalta-se que os parâmetros principais, como módulo de elasticidade, foram obtidos do estudo de Truong *et al.* (2019). Alguns dados foram obtidos da literatura, como expansão térmica das fibras de carbono e condutividade térmica.

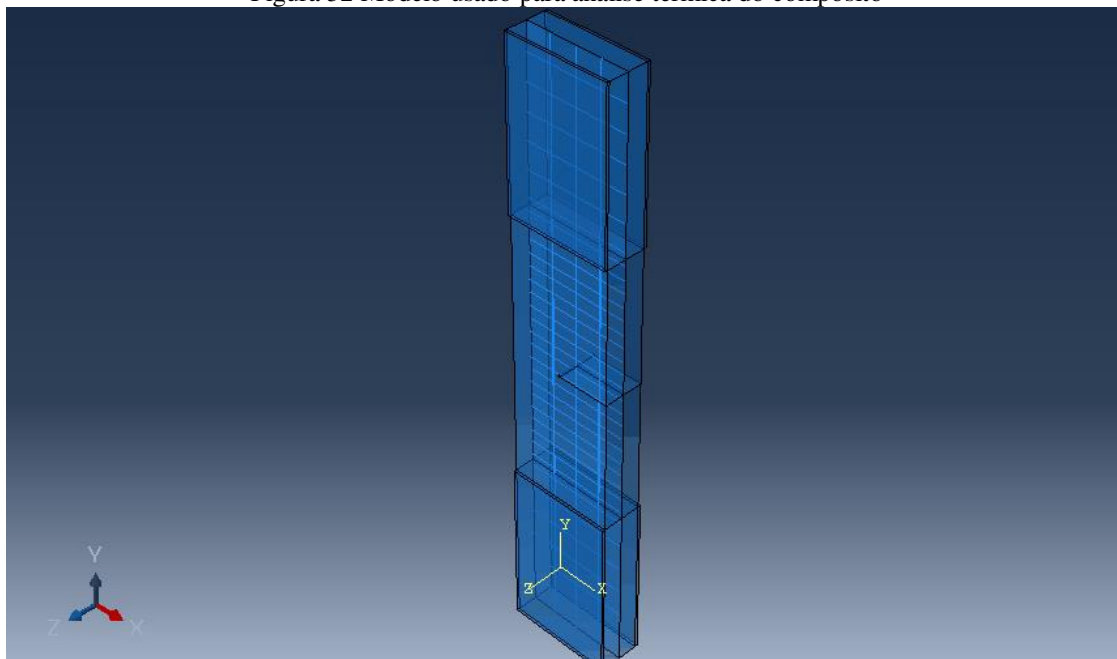
Tabela 6 Propriedades térmicas dos materiais

Material	Condutividade térmica (W.m⁻¹.K⁻¹)	Calor específico J/kg.K	Coefficiente de expansão térmica °C⁻¹
Matriz (Argamassa)	0.84	1040	5×10^{-6}
Fibras de carbono	40	712	2.6×10^{-6}
CRFP	2	1110	1.14×10^{-6}

Fontes: Asadi *et al.* (2020); El-Nemr *et al.* (2016); Homsy *et al.* (2018); Bard *et al.* (2019); Gbekou *et al.* (2023); Dong *et al.* (2018); Pradere *et al.*, (2008).

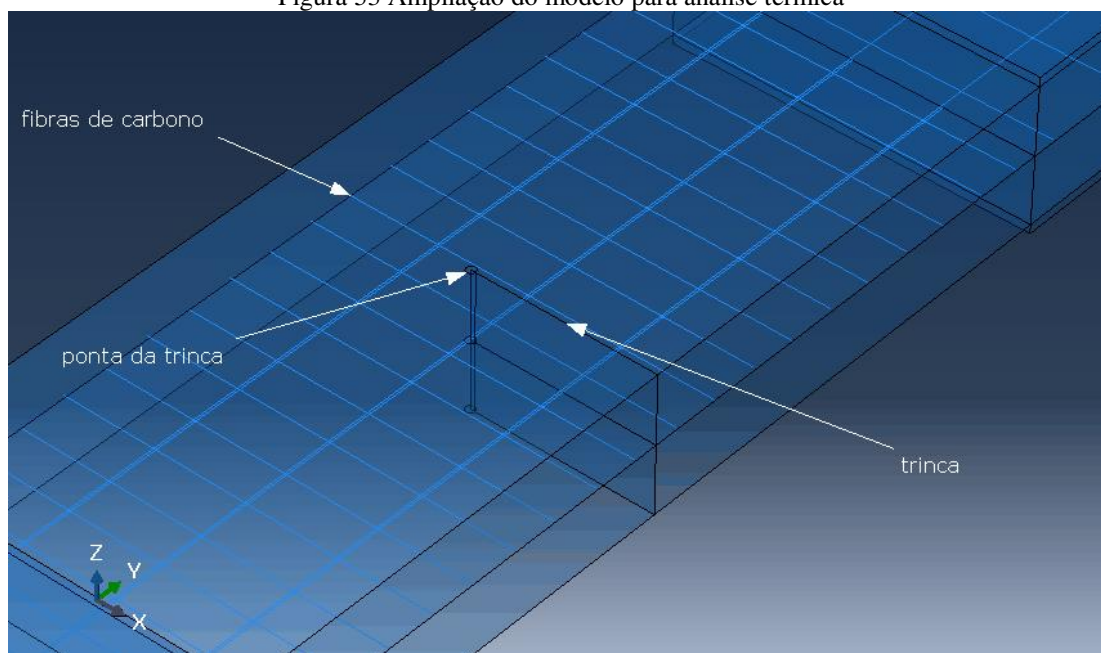
A Figura 52 mostra o modelo numérico criado no Abaqus para análise termomecânica da argamassa reforçada com fibras de carbono. Já a Figura 53 apresenta a ampliação na região da inserção da trinca no modelo. A imagem translúcida possibilita a visualização da disposição das fibras na configuração bidirecional. Ademais, observa-se a ponta da trinca no modelo.

Figura 52 Modelo usado para análise térmica do compósito



Fonte: Autor.

Figura 53 Ampliação do modelo para análise térmica



Fonte: Autor.

Após a análise térmica do compósito, iniciou-se a análise mecânica. Nesse tipo de análise, considera-se estática linear e um deslocamento de 0.04 mm nas extremidades do modelo. No campo predefinido, utilizou-se como dados de entrada os dados de saída do modelo térmico e compatibilidade de malha. Acerca do tipo de elemento e malha, mantém-se os modelos anteriores.

6.6 Modelo termomecânico para laminado com fibras sintéticas

O modelo experimental usado para criar um modelo numérico é o do estudo de Ghaedamini *et al.* (2019) em que utilizaram um laminado com várias camadas (Figura 54). Este artigo apresenta um estudo comparativo experimental para determinação de tensão residual em compósitos laminados usando os métodos de núcleo de anel, furo incremental e corte. Os resultados mostraram que o método do núcleo do anel pode liberar pelo menos 17% mais tensão em comparação com o método de perfuração.

Esses modelos experimentais podem ser usados para comparar os valores obtidos pela teoria dos laminados. Entretanto, as equações para obter as tensões residuais dos laminados levam em consideração principalmente o módulo de elasticidade e os coeficientes de expansão térmica das lâminas. Já modelo numérico pode levar em consideração todos os parâmetros necessários como calor específico do laminado, o fluxo térmico, a densidade do laminado e o ciclo térmico.

A Figura 54 mostra o modelo experimental de laminado do estudo de Ghaedamini *et al.* (2019) que apresenta 4 camadas a 0° e 4 camadas a 90° simétrico.

Figura 54 Amostra de compósito laminado cross-ply $[0_4/90_4]$ simétrico



Fonte: Ghaedamini *et al.*, (2019)

A Tabela 7 mostra os dados de uma laminado do experimento dos autores.

Tabela 7 Propriedades da lâmina

Material	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}
lamina	32.4	10.1	3.96	0.27

Fontes: Ghaedamini *et al.*, (2019)

As técnicas para determinação utilizadas pelo estudo de Ghaedamini *et al.* (2019) foram as: *Hole drilling*, *Ring core*, *Slitting*. Essas técnicas foram comparadas com o objetivo de determinar a tensão residual no laminado em cada camada. Nesse caso, foi determinada a tensão residual nas 8 camadas tanto em x e y.

Para criação do modelo numérico mais adequado aos resultados experimentais de Ghaedamini *et al.* (2019), utilizaram-se dois modelos, o primeiro de elementos de casca, o segundo de elemento sólido.

6.6.1 Modelo tipo Shell para determinação da tensão residual

Com o intuito de determinar a tensão residual nesse tipo de material, adotou-se no primeiro modelo numérico com elementos tipo *Shell*. Conforme mencionado anteriormente, os dados de entrada foram obtidos do experimento de Ghaedamini *et al.*, (2019), no qual o laminado apresentava 16 camadas e 3 mm de espessura. Com os dados de uma lâmina unidirecional, através das equações dos laminados, as propriedades dos laminados foram obtidas. Nesse caso, criou-se um programa em Python que calcula as propriedades dos laminados a partir das propriedades das lâminas. As propriedades com relação a expansão termica foram obtidas do estudo de Aklilu *et al.* (2020) – Tabela 8.

Tabela 8 Coeficiente de expansão térmica de uma lâmina epóxi/fibra de vidro

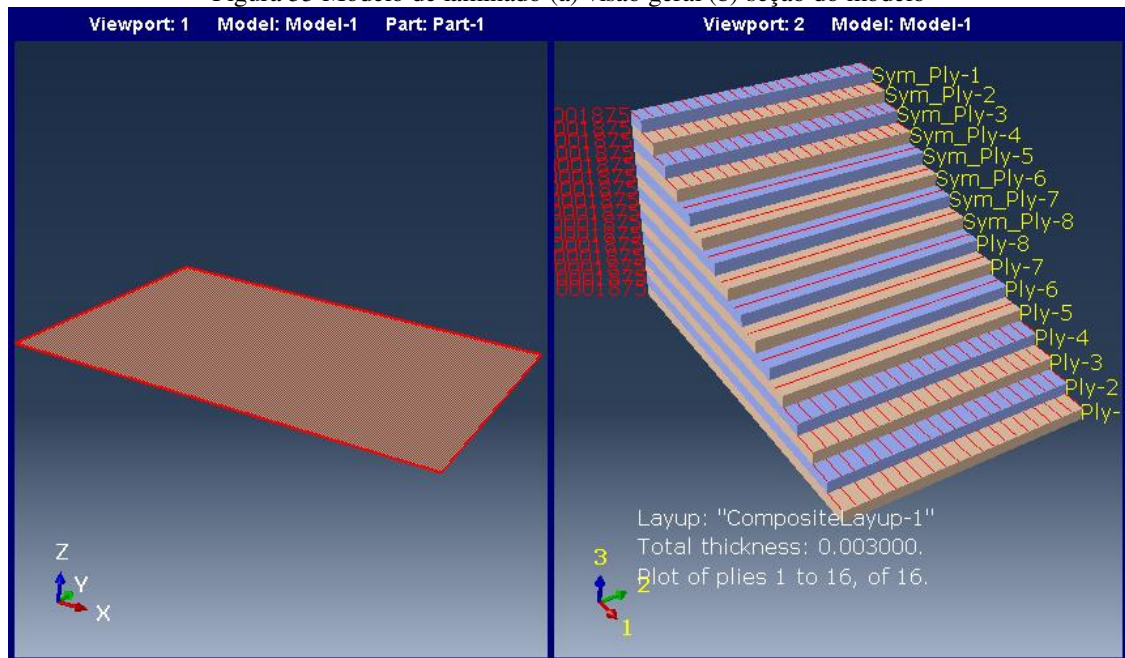
Material	$\alpha_{11} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	$\alpha_{22} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	$\alpha_{33} (^{\circ}\text{C}^{-1})$
Lâmina	5.5×10^{-6}	3.08×10^{-5}	3.08×10^{-5}

Fontes: Aklilu *et al.* (2020).

O software comercial ABAQUS/CAE realizou a simulação numérica do laminado. Esta simulação assumiu as seguintes simplificações: existe uma ligação perfeita entre as fibras e a matriz. Ambas as fibras e matriz se comportam como materiais linearmente elásticos, e a matriz está livre de vazios. As camadas de cada laminado variam na orientação $[0_4/90_4]_s$. A geometria utilizada é mostrada na Figura 55a. De acordo com o experimento, o laminado passou por um aquecimento de até 150°C .

As condições de contorno adotadas foram: foi considerada apoiada. Sem aplicação de forças externas, apenas o efeito da temperatura foi analisado. Na simulação, foram adotados elementos tipo *shell*, convencionais para a criação do modelo no abaqus, conforme a Figura 55b. O tipo de elemento adotado foi o *quad-dominad*, técnica livre, ordem geométrica linear. No campo predefinido, usou-se a temperatura como variável e considerou-se como constante através da região.

Figura 55 Modelo de laminado (a) visão geral (b) seção do modelo



Fonte: Autor

6.6.2 Modelo tipo sólido para determinação da tensão residual

No que se refere ao modelo termomecânico do laminado, os seguintes procedimentos para modelagem computacional foram adotados: criação da parte, partição, propriedades mecânicas e térmicas, orientação das lâminas, passo do tipo acoplamento termo-deslocamento (transitório). No campo de predefinição considerou-se 20°C na temperatura inicial e constante através da região. A forma do elemento considerada foi do tipo HEX e técnica de estrutura. No que concerne a malha, adotou-se do tipo *C3D8T: An 8-node thermally coupled brick, trilinear displacement and temperature* e ordem geométrica linear. As condições de contorno adotadas foram do tipo temperatura em ambas as faces externas de 150°C e apoiada. As propriedades adotadas nesse modelo estão presentes na Tabela 9.

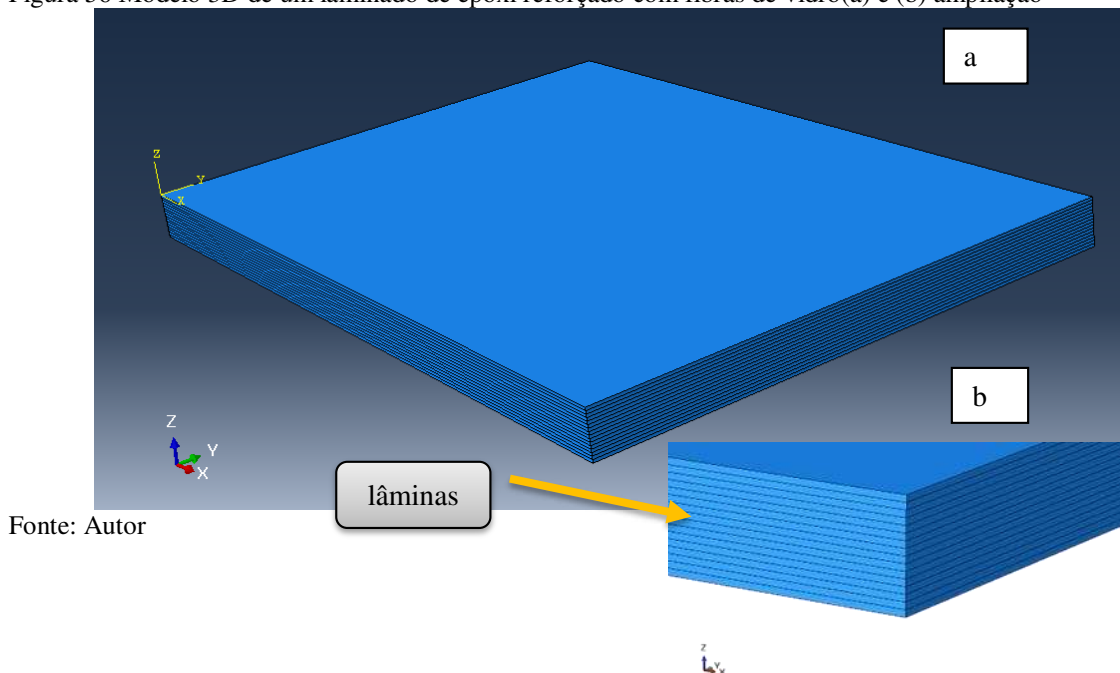
Tabela 9 Propriedades físicas/térmicas dos materiais

Material	Condutividade térmica (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Calor específico J/kg.K	Massa específica (g/cm ³)
Lâmina	6.22	4000	1.2

Fontes: Chen *et al.* (2021); Ramesh *et al.* (2019); Mihiu *et al.* (2020).

A Figura 56 apresenta o modelo 3D do laminado criado no Abaqus. Observa-se a partição da parte em lâminas.

Figura 56 Modelo 3D de um laminado de epóxi reforçado com fibras de vidro(a) e (b) ampliação



Fonte: Autor

6.6.3 *Modelo para determinação da tensão residual de laminado de matriz cimentícia e fibra de carbono*

Já com relação à simulação para determinação da tensão residual do laminado, a pesquisa adotou as seguintes etapas: calculou-se as propriedades mecânicas de uma lâmina e as propriedades do laminado simétrico pela teoria do laminado. A tensão residual foi calculada analiticamente e numericamente.

O laminado apresentou 6 camadas, com cada uma de 1 mm. Um suporte foi considerado um apoio. O corpo de prova foi sujeito às seguintes variações de temperatura: 20°C, 150°C, 500°C e 800°. As diferenças de temperatura foram indicadas por: T1 (150°C-20°C), T2 (500°C-20°C), T3 (800°C-20°C).

A adesão entre fibras/matriz foi considerada perfeita para a análise analítica de acordo com a teoria dos laminados. O mecanismo de transferência de tensão de ligação na interface foi perfeito. A geometria do laminado foi definida como 40×40×6 mm.

6.6.3.1 *Teoria dos Laminados aplicada à tensão residual em compósitos*

Para análise analítica utilizou-se a teoria dos laminados. Essa teoria é útil no cálculo de tensões e deformações em cada lâmina de uma estrutura laminada fina. Começando com a matriz de rigidez de cada lâmina a , o procedimento passo a passo na teoria da laminação inclui: cálculo de matrizes de rigidez para o laminado; cálculo de deformações e curvaturas no plano médio para o laminado devido a um determinado conjunto de forças e momentos aplicados; cálculo das deformações no plano ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{xy} para cada lâmina; cálculo das tensões no plano σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} em cada lâmina.

As suposições básicas na teoria da laminação são: o laminado é fino e largo (largura espessura), existe uma ligação interlaminar perfeita entre várias lâminas, a distribuição da deformação na direção da espessura é linear, todas as lâminas são macroscopicamente homogêneas e se comportam de forma linear elástica.

As deformações térmicas se dão por conta de expansões livres (ou contrações) causadas por variações de temperatura, mas as deformações mecânicas acontecem tanto às cargas aplicadas quanto às cargas térmicas. As cargas térmicas surgem devido a restrições impostas por várias camadas contra a sua livre expansão térmica.

As equações para efeitos térmicos são (54), (55), (56) e (57). Onde N é a força de tração, N_{xy} força de cisalhamento resultante (por unidade de comprimento), M é o momento de flexão,

M_{xy} momento de torção (torção) resultante (por unidade de comprimento), k são curvaturas de flexão do laminado, ε_{xx}° , ε_{yy}° deformações normais no plano médio no laminado, deformação de cisalhamento no plano médio γ_{xy}° no laminado, k_{xx} , curvaturas k_{yy} do laminado, curvatura de torção k_{xy} do laminado e variação de temperatura ΔT .

A princípio, de posse das propriedades individuais de cada material, calcularam-se as propriedades da lâmina e posteriormente do laminado. Para a realização desses cálculos dos laminados, o programa Python foi utilizado, assim os resultados para todas as configurações estudadas foram obtidos.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - [T^*] \Delta T \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - [T^{**}] \Delta T \quad (55)$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{11})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{12})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{16})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{12})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{22})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{26})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{16})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{26})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{66})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$[T^{**}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{11})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{12})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{16})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{12})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{22})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{26})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{16})_j (\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{26})_j (\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{66})_j (\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \end{bmatrix} \quad (57)$$

6.6.3.2 Modelo para determinação da tensão residual

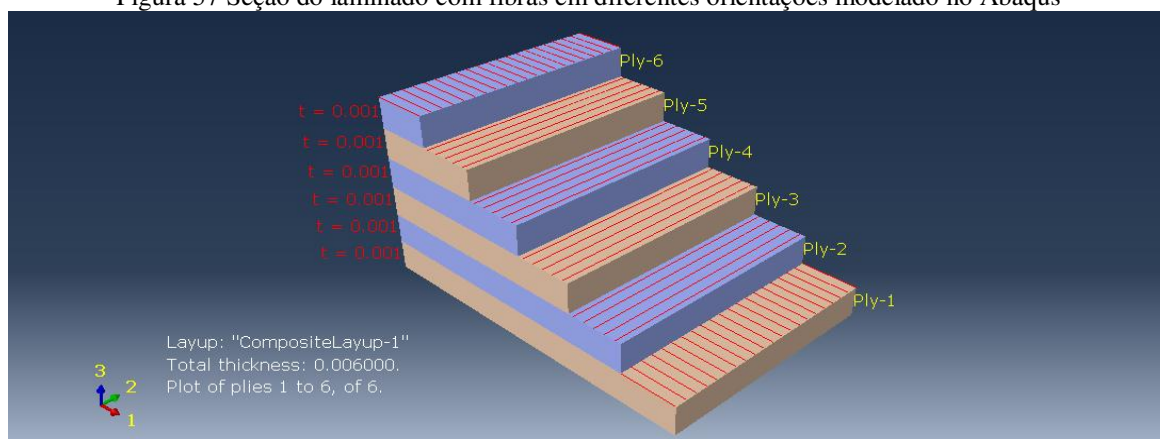
O software comercial ABAUS/CAE realizou a simulação numérica do laminado. O

laminado apresentou 6 camadas, cada uma de 1 mm. As propriedades de cada lâmina foram obtidas através da regra de misturas, e a simulação considera a interação perfeita entre fibra e matriz. Esta simulação assumiu as seguintes simplificações: existe uma ligação perfeita entre as fibras e a matriz.

Ambas as fibras e a matriz se comportam como materiais linearmente elásticos, e a matriz está livre de vazios. As camadas de cada laminado variam na orientação [0/15/15]s, [0/45/45]s, [0/90/90]s. A geometria que foi utilizada é mostrada na Figura 57. A variação de temperatura aplicada ao corpo modelo de análise foi considerada de 20°C, 150°C, 500°C e 800°.

As condições de contorno adotadas foram: foi considerado como apoiada, sem aplicação de forças externas, apenas o efeito da temperatura foi analisado. Adotaram-se na simulação elementos tipos *shell* conversional para a criação do modelo no abaqus, conforme a Figura 57. O tipo de elemento adotado foi o *quard-dominad*, técnica livre, ordem geométrica linear. No campo predefinido, usou-se a temperatura como variável e considerou-se constante através da região. A temperatura inicial sai de mais alta para mais baixa, para que seja analisada a tensão residual no material.

Figura 57 Seção do laminado com fibras em diferentes orientações modelado no Abaqus



Fonte: Autor

Com relação à simulação tensão residual do compósito, utilizaram-se os métodos de Martha *et al.* (2016) para análise de convergência. De acordo com o método, conforme a diminuição do tamanho da malha, o resultado tende a convergir. Esta análise utilizou is tamanhos de malha de: 10 mm, 8 mm, 7 mm, 6 mm, 5 mm e 2 mm.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 Modelo – calibração do modelo numérico e validação para determinação do fator de intensidade de tensão

Os resultados nessa seção são referentes aos itens [6.1](#) e [6.2.2](#). Na Tabela 10, os valores obtidos no modelo computacional foram próximos, com erro de aproximadamente de 1%. Dessa forma, considerou-se esse modelo para prosseguimento do estudo sobre fator de intensidade de tensão de laminados de concreto com fibras de carbono.

Com o modelo computacional pronto, modificaram-se as propriedades do material para as constantes de engenharia do laminado, conforme cálculos através de programação baseada na teoria clássica de laminados.

Para calcular o fator de intensidade de tensão obtido no experimento realizado pelo estudo de Xargay *et al.* (2018), utilizou-se a área sob a curva usando o originlab 2017, que utiliza integral para calcular a área sob a curva de uma função. A partir do resultado obtido, dividiu-se pela área de fratura, assim obteve-se a energia de fratura do concreto GF, 0.16 N/mm. Com a energia de fratura, calculou-se o valor do fator de intensidade de tensão do concreto equação de Rice.

Figura 58 Gráfico Força x CMOD do experimento de Xargay *et al.* (2018)

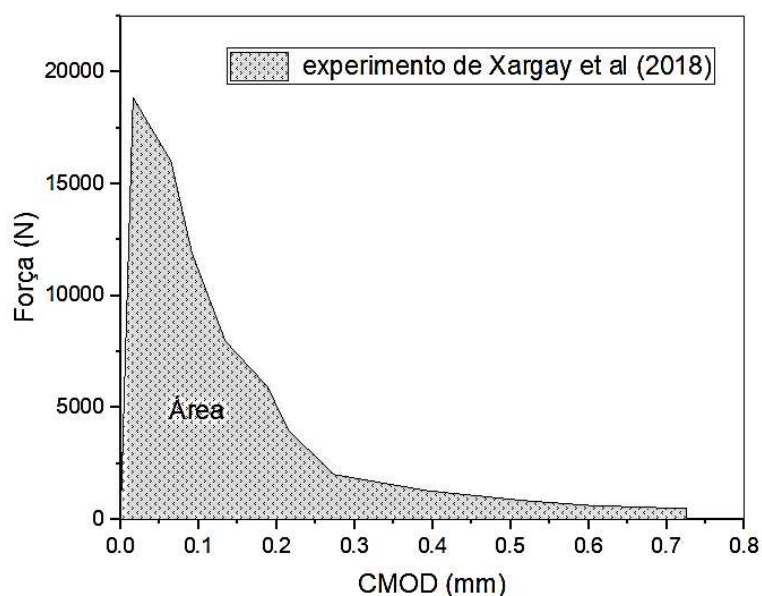


Tabela 10 Comparação dos resultados experimentais com o modelo computacional usando FEM e XFEM (para malha mais refinada)

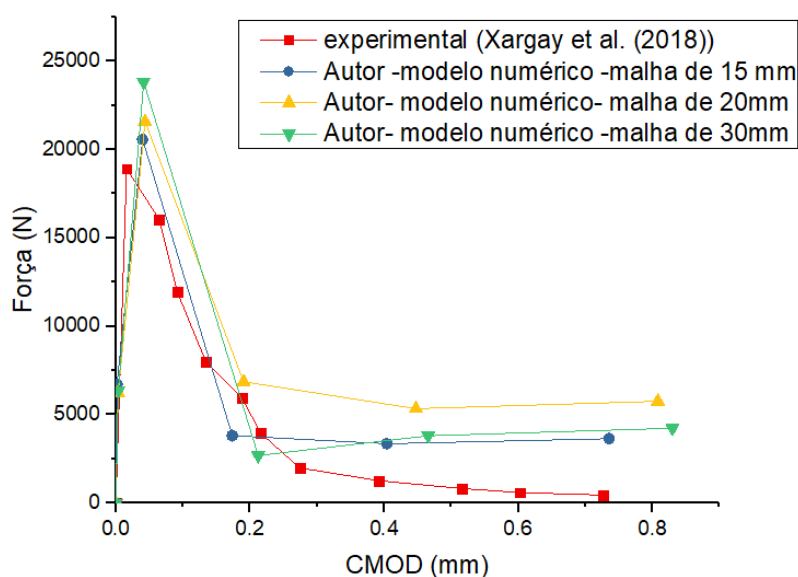
Corpo de prova	Modelo experimental- K_{IC} (MPa m ^{1/2})	Modelo computacional (Autor) K_{IC} (MPa m ^{1/2}) -contorno 3.	Erro(%)
PI (Vantadori <i>et al.</i> , 2016)	0,547	0,540 (FEM)	1,296
Xargay <i>et al.</i> (2018)	2,72	2,68 (XFEM)	1,47

7.2 Modelo – concreto

7.2.1 Modelo numérico de dano e KI do concreto usando XFEM

Os resultados nessa seção são referentes ao item [6.2.1](#). A Figura 59 mostra a comparação entre o modelo experimental e o modelo numérico usando o Abaqus, onde é possível constatar que o modelo numérico está em concordância com o experimental, deve-se ressaltar que os últimos elementos acabaram interferindo no comportamento, possivelmente, devido ao acoplamento na região de carregamento e que quanto menor a malha menor essa interferência. Nesse caso, usando o XFEM, pode-se determinar a abertura da trinca em um material como o concreto, considerando esse modelo de dado com uma trinca central.

Figura 59 Comparação do ensaio experimental e numérico -CMOD



Na Figura 60 , temos a evolução do caminho da trinca no concreto do estudo de Xargay *et al.* (2018).

Figura 60 Visualização sequencial da evolução da trinca para CMOD=0.5, 0.5, 1.00, 2.00 e 3.00 mm



Fonte: Xargay *et al.* (2018)

Na Figura 61 há o modelo numérico proposto pelo autor da tese. Nesse caso, utilizou-se um modelo usando XFEM para obter o caminho da trinca numérica; além disso, utilizou-se *Max Principal stress* – o material entra no processo de falha ao alcançar a tensão máxima principal que no caso irá ocorrer na ponta da trinca (região onde ocorre concentração de tensão). A partir de determinado ponto, o concreto inicia o processo de abertura da trinca. Nesse caso, o CMOD está relacionado à energia de tenacidade à fratura do material. Além disso, está também relacionado com o fator de intensidade de tensão crítico do concreto reforçado com fibras.

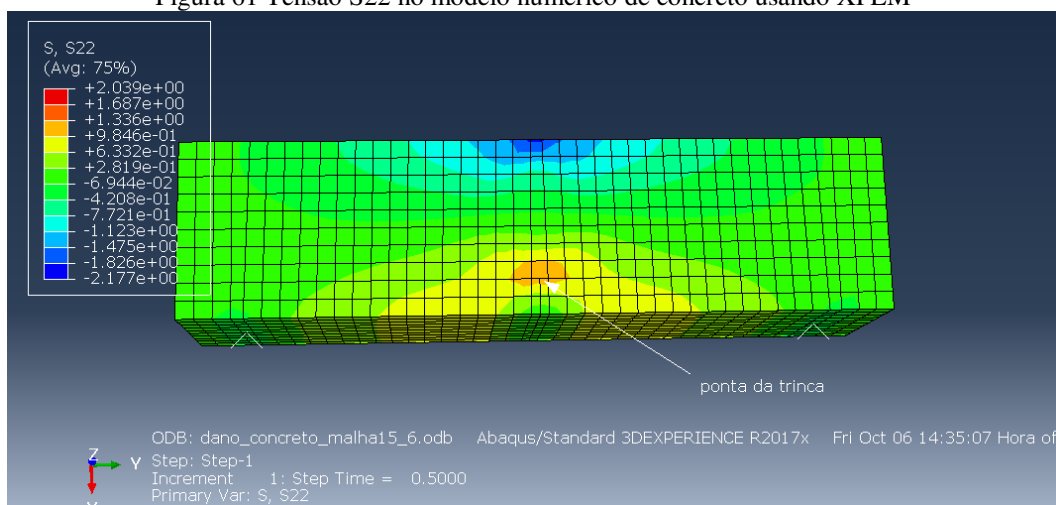
Dependendo do tipo de fibra utilizado no concreto e no comprimento, pode influenciar na resposta da abertura da trinca, ou seja, no processo de dano. Existem três regiões principais nos materiais: elástica, plástica e região de processo de falha. No caso do concreto sem reforço no ensaio de três pontos para determinação da tenacidade à fratura, a região plástica praticamente foi irrisória; já com relação ao reforço, a região de dano é mais visível. Na simulação computacional desse material deve-se levar em conta esse aspecto.

Erros possíveis no Abaqus ao analisar a fratura do material:

- distorção da malha;
- condição de contorno;
- trinca propagando na lateral do elemento;
- deslocamento na falha do elemento.

A Figura 61 mostra a tensão em S22(MPa) do modelo numérico de dano do concreto no início do ensaio, indicando a tensão na ponta da trinca antes da propagação.

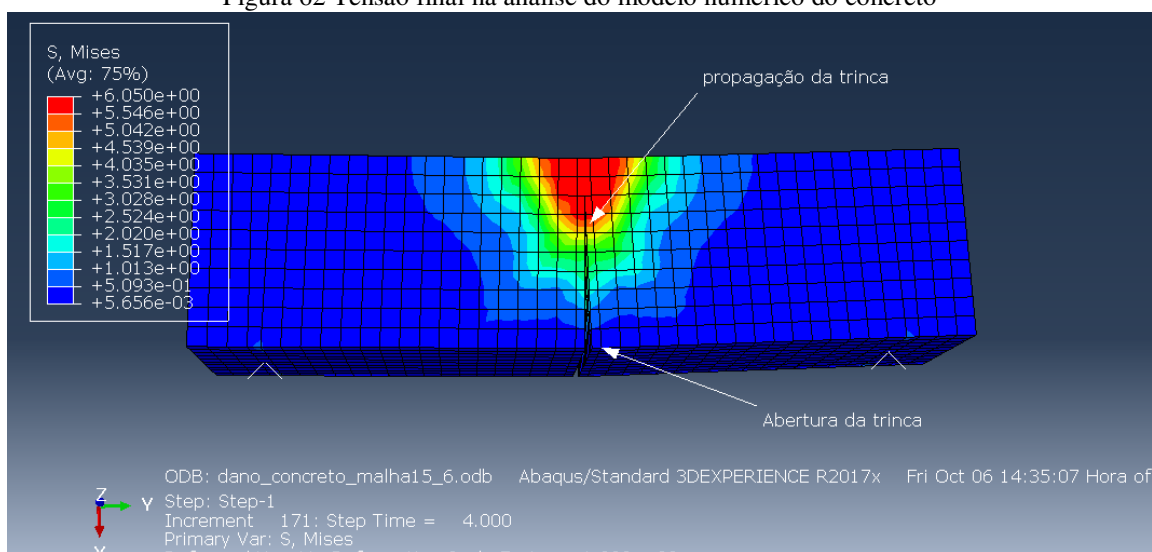
Figura 61 Tensão S22 no modelo numérico de concreto usando XFEM



Fonte: Autor

A Figura 62 apresenta a região onde se localiza a tensão (MPa) no final da propagação da trinca. Nessa região, o material apresenta certa tensão devido aos últimos elementos finitos presentes no final da análise.

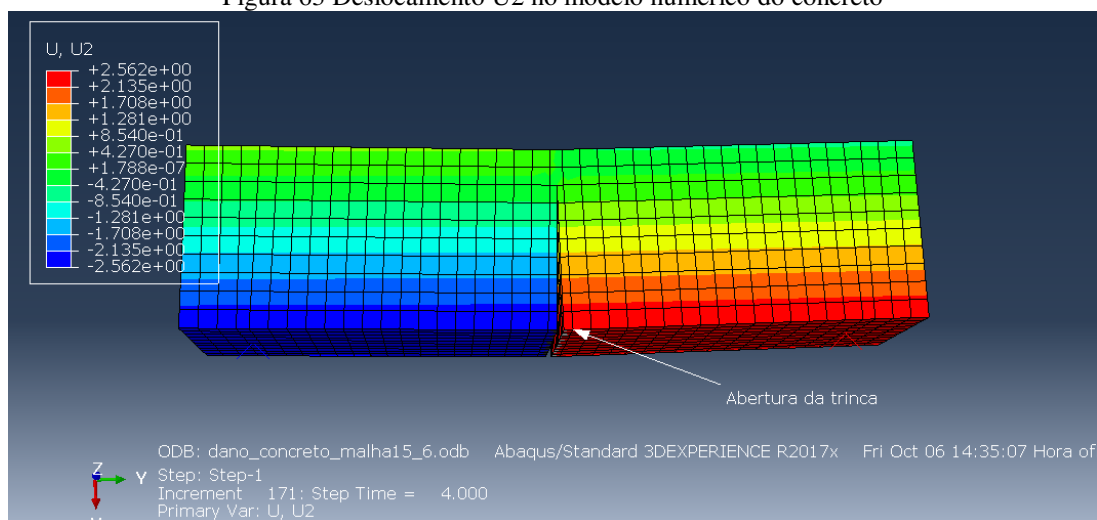
Figura 62 Tensão final na análise do modelo numérico do concreto



Fonte: Autor

A partir Figura 63, verifica-se a abertura da trinca no modelo numérico — a região em vermelho indica o deslocamento para direita no sentido positivo, enquanto a indicação em azul indica o deslocamento no sentido contrário.

Figura 63 Deslocamento U2 no modelo numérico do concreto

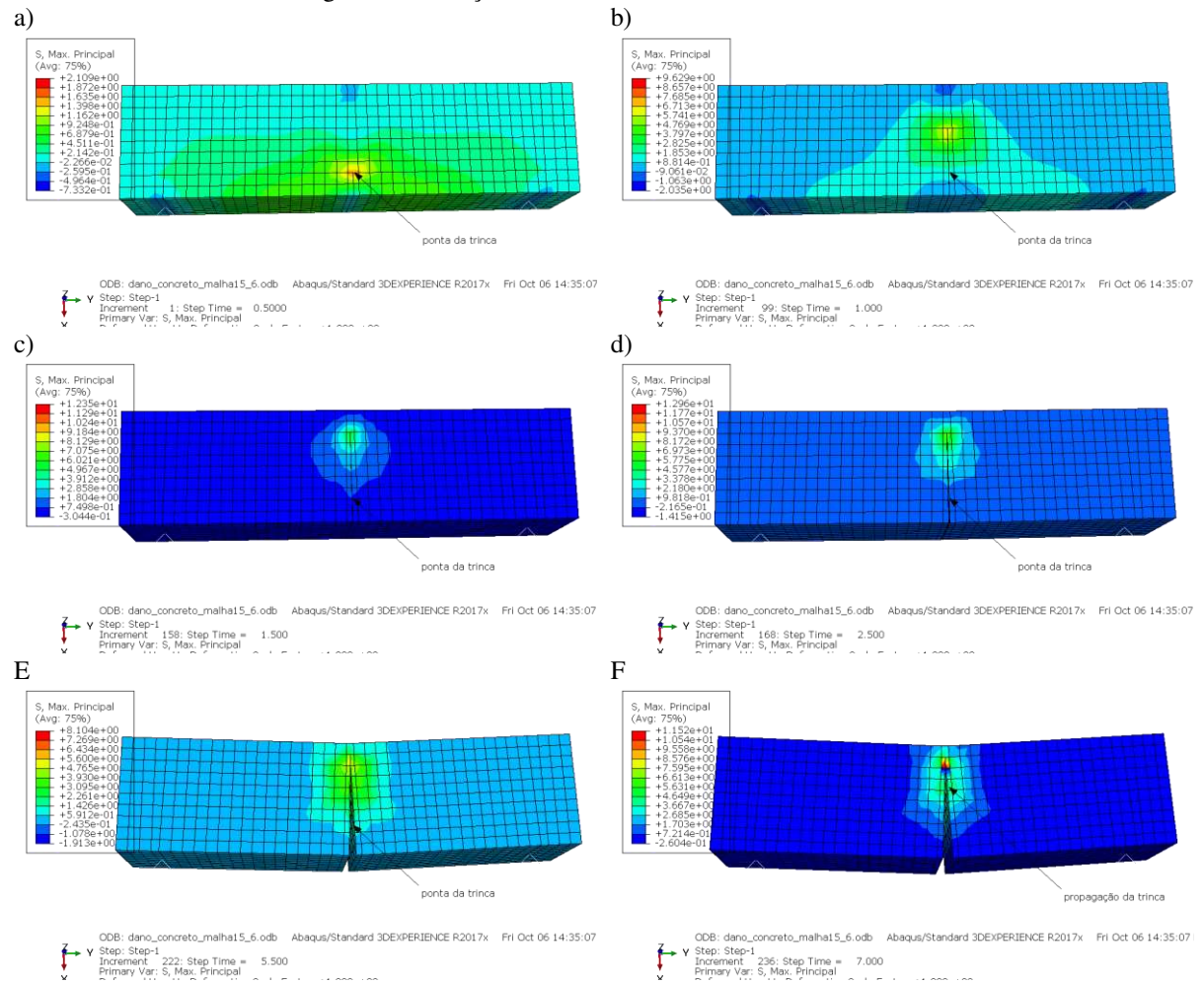


Fonte: Autor

Na Figura 64, percebe-se a região de início da propagação da trinca no modelo numérico. Conforme o deslocamento vertical, há o dano do elemento e assim sucessivamente até chegar ao colapso total do modelo, o qual mostra o final do processo de dano com uma tensão na região superior. Pode-se inferir através desse modelo que, ao utilizar o concreto como material isotrópico e homogêneo, é possível obter valores próximos ao modelo real, logo, pode-se utilizar o XFEM como modelo de dano nesse tipo de análise. Das *et al.* (2019) simularam a fratura em vigas de argamassa entalhadas usando o método de elementos finitos estendidos (XFEM) e peridinâmica. Ambas as abordagens produziram resultados satisfatórios na simulação de fraturas em materiais à base de cimento.

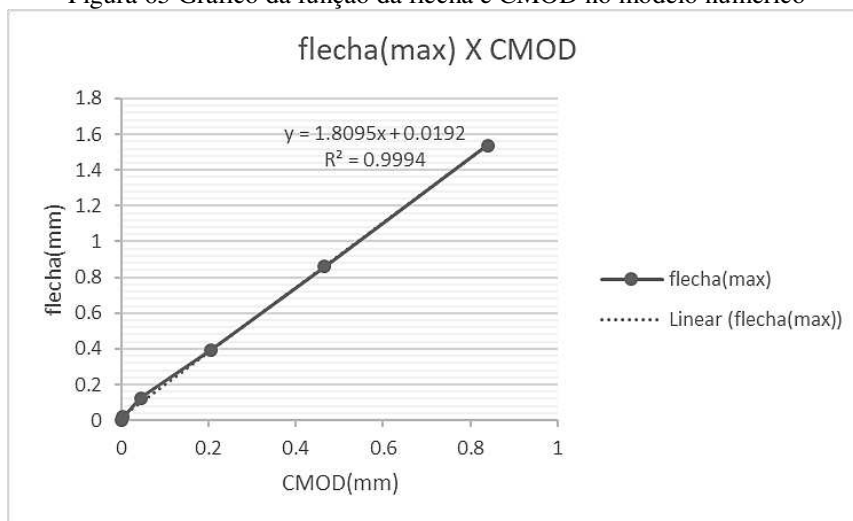
A Figura 64 mostra a evolução do dano do material *step by step*, onde nota-se as regiões de tensões ao longo do dano no método XFEM. No início, há uma concentração de tensão; essa concentração de tensão na região de domínio é o núcleo no colapso do material — nesse ponto deve-se calcular o fator de intensidade de tensão na condição estática. As sequências das figuras mostram como se dá a distribuição de tensões ao longo do modelo numérico. Percebe-se que a tensão máxima principal diminui em certo instante, posteriormente aumenta, chegando assim ao final do ensaio.

Figura 64 Evolução do dano do concreto usando XFEM



Através da Figura 65 é possível notar a relação entre o deslocamento vertical e a abertura da trinca no modelo numérico. Esse tipo de análise possibilita a utilização desse modelo para determinar o CMOD desse material.

Figura 65 Gráfico da função da flecha e CMOD no modelo numérico

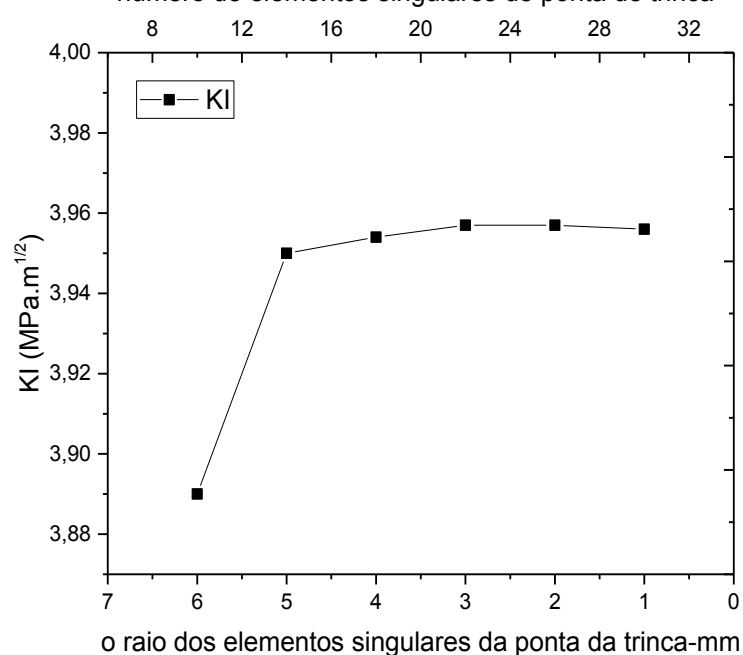


Fonte: Autor.

7.3 Modelo analítico e numérico para laminados de matriz cimentícia e fibras sintéticas

Os resultados apresentados nesta seção são referentes ao modelo apresentado no item [6.3](#). A Figura 66 mostra que à medida que o raio diminui e o número de elementos na ponta da trinca aumenta, há uma tendência de convergência dos valores de KI. O laminado usado nesta análise foi de $\pm 75^\circ$.

Figura 66 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados número de elementos singulares de ponta de trinca



Fonte: Autor

A Tabela 11 mostra os valores obtidos nas simulações. Conforme o raio diminui e o número de elementos na ponta da trinca aumenta, o KI de interesse começa a convergir para um determinado valor. A Figura 66 e a Tabela 11 mostram os refinamentos da malha. Se nenhuma mudança mais considerável no resultado for observada, pode-se inferir que o resultado convergiu. O erro final foi de 0,60 % para um raio de 1 mm, 24 elementos na ponta da trinca e para um número total de 22.912 elementos.

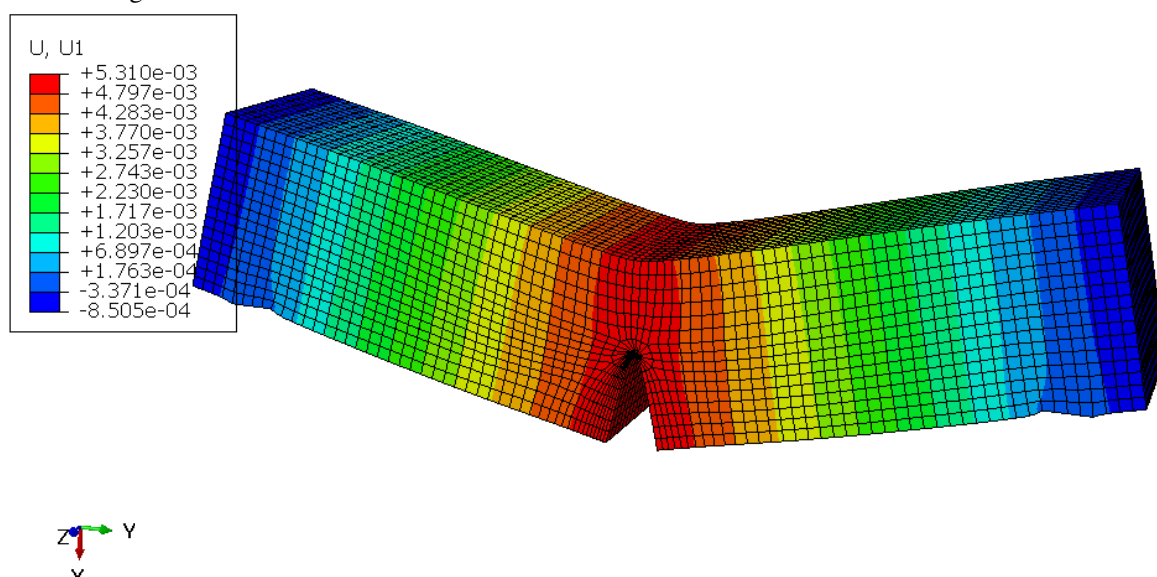
Tabela 11 Parâmetros de análise de convergência

ELEMENTOS SINGULARES NA PONTA DA TRINCA	NÚMERO DE ELEMENTOS SINGULARES DE PONTA DE TRINCA	NÚMERO TOTAL	KI $MPa\sqrt{m}$	ERRO(%)
6	10	2584	3,890	2,26
5	12	17360	3,950	0,75
4	14	19072	3,954	0,65
3	16	21648	3,957	0,58
2	21	22016	3,957	0,58
1	24	22912	3,956	0,60

Fonte: Autor.

O resultado da análise numérica na Figura 67 apresenta os valores de deslocamento máximo (U1) para a amostra entalhada de aresta única. Observa-se que o valor máximo de tensão varia de acordo com a configuração do laminado.

Figura 67 Deslocamento de laminado de concreto e fibra de carbono com entalhe na borda



Fonte: Autor.

A Tabela 12 mostra o fator de intensidade de tensão na região da ponta da trinca-crack

tip para diferentes orientações de fibra no laminado obtido por meio de análise de elemento finito. Os laminados com ângulos de $\pm 15^\circ$ exibem valores KI obtidos analítica e numericamente de $0,28 \text{ MPa}\sqrt{m}$ e $0,27 \text{ MPa}\sqrt{m}$, respectivamente (ver Tabela 12). A tensão atingiu $0,75 \text{ MPa}$ e o deslocamento encontrado foi de $0,00045 \text{ mm}$. Comparando este resultado dos laminados com o ângulo de $\pm 75^\circ$, os valores de KI obtidos no modelo analítico ($3,96 \text{ MPa}\sqrt{m}$) e numérico ($3,98 \text{ MPa}\sqrt{m}$) apresentam aumento de $\times 14,67$ e $\times 14,21$, respectivamente. Para o laminado com ângulo de $\pm 75^\circ$, a tensão da ponta da trinca atingiu $9,24 \text{ MPa}$ e permitiu um deslocamento maior de $0,006 \text{ mm}$. A simetria do laminado com ângulo de $\pm 45^\circ$ nos deu um valor intermediário de KI, possibilitando aplicações com carregamento bidirecional.

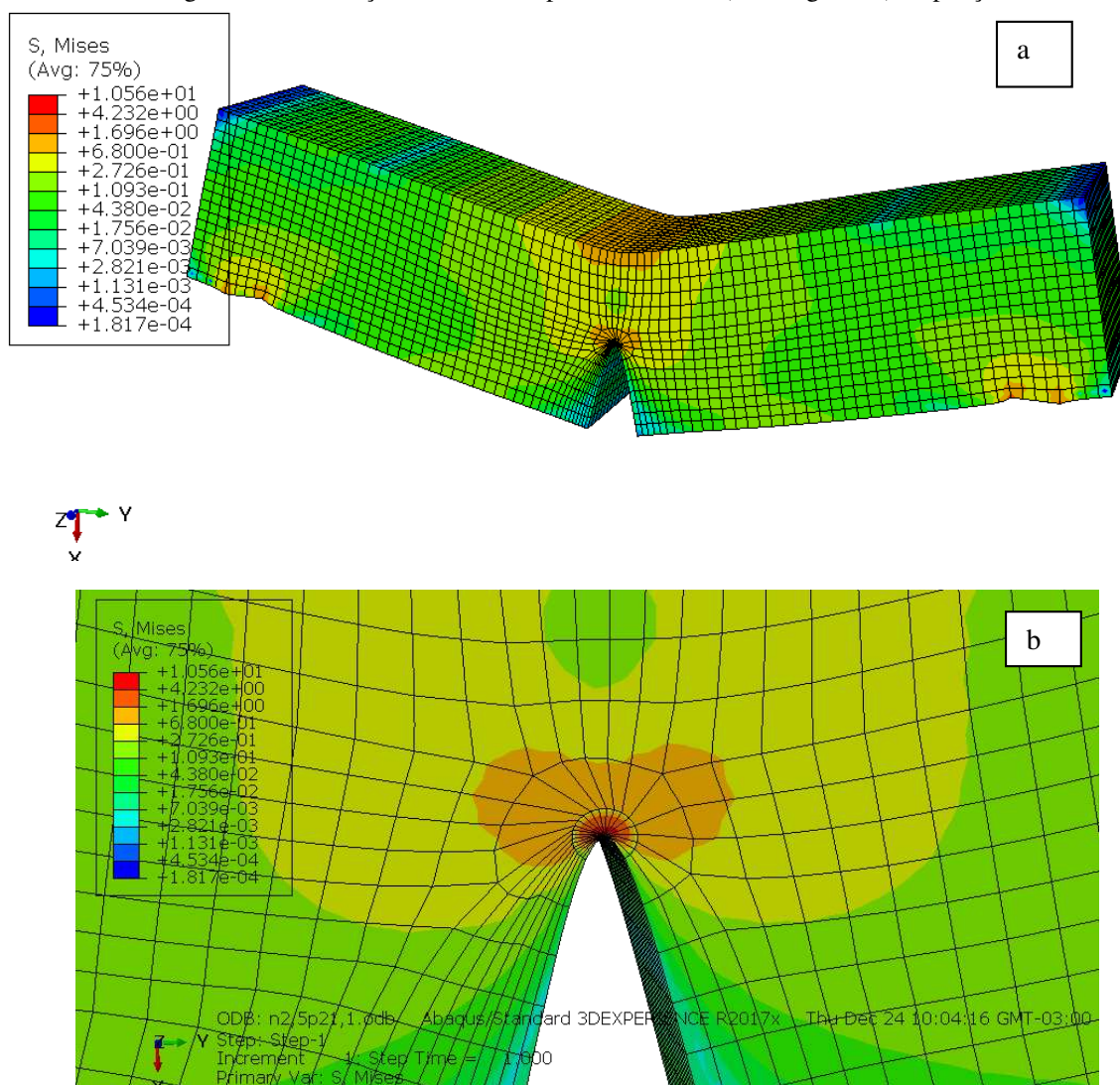
Tabela 12 Tensões máximas, deformações e resultado de FEM do KI de concreto reforçado com fibras de carbono em diferentes ângulos de orientação de fibras

ÂNGULO (°)	ABAQUS KI $\text{MPa}\sqrt{m}$	ANALÍTICO KI $\text{MPa}\sqrt{m}$	DP	SMISES MPa	S ANALÍTICO MPa.	U.MAX. mm	U ANALÍTICO mm.
± 15	0,27	0,28	0,0070	0,80	0,87	0,00045	0,0005
± 25	0,75	0,76	0,0070	2,12	2,33	0,00121	0,0013
± 35	1,38	1,41	0,0212	3,72	4,30	0,0020	0,0023
± 45	2,11	2,14	0,0212	5,75	6,53	0,00345	0,00350
± 55	2,82	2,87	0,0353	7,60	8,77	0,0040	0,0047
± 65	3,46	3,51	0,0353	9,24	10,74	0,0050	0,0058
± 75	3,96	3,98	0,0141	11,87	12,20	0,0060	0,0065

Fonte: Autor

A Figura 68 mostra a distribuição de tensões na ponta da trinca para o compósito com orientação da fibra de $\pm 75^\circ$. As fibras neste ângulo permitem maior esforço de tração devido à combinação com a matriz de concreto.

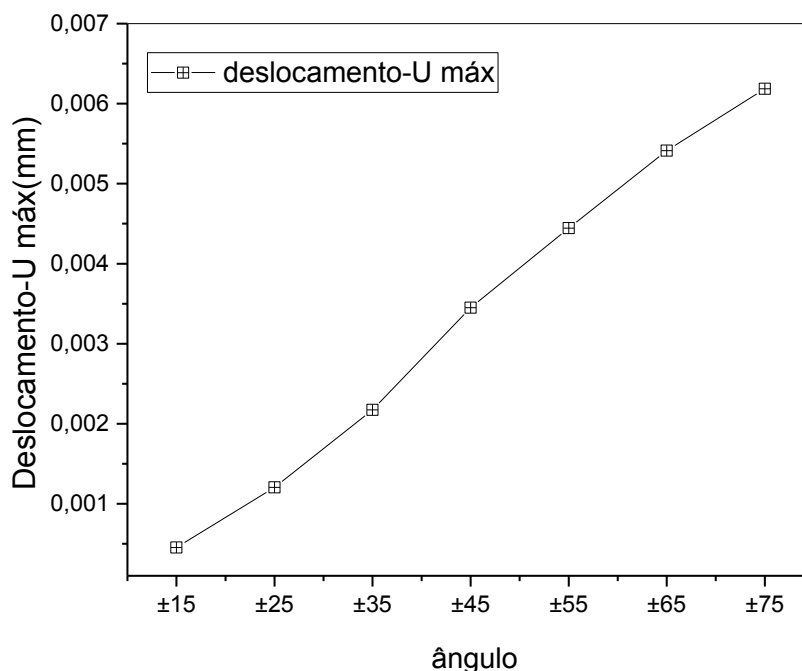
Figura 68 Distribuição de tensão na ponta da trinca. a) visão geral, b) ampliação



Fonte: Autor

A Figura 69 mostra a variação na deformação do concreto com fibra de carbono para diferentes orientações das fibras. Através dos resultados, notou-se que a deformação máxima ocorreu com o ângulo de $\pm 75^\circ$. Por outro lado, o compósito com ângulo de $\pm 15^\circ$ apresentou menor valor de deformação.

Figura 69 Deslocamento vertical máximo(U) x ângulo de orientação da fibra dos laminados de concreto / fibra de carbono



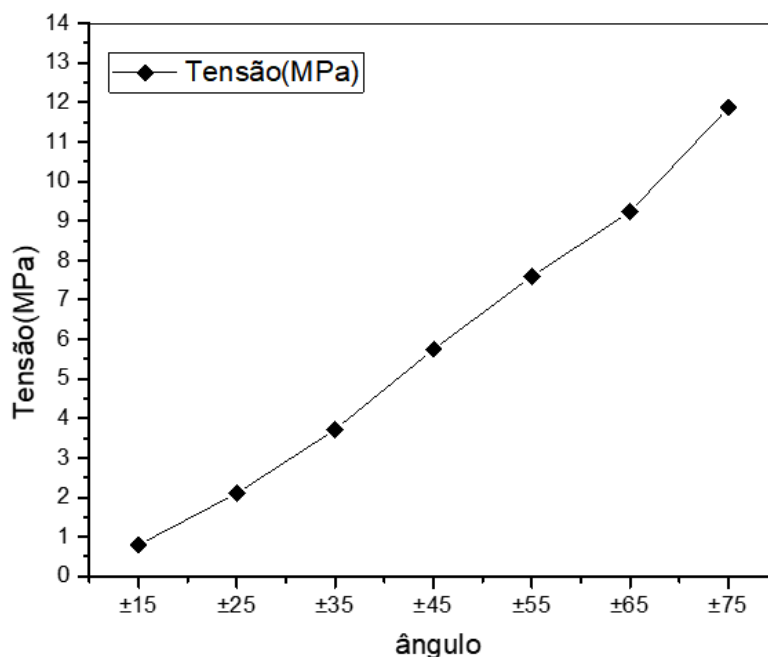
Fonte: Autor

Os resultados revelam que em ângulos abaixo de $\pm 15^\circ$, a maior parte da carga é absorvida pela matriz. Assim, a tensão na região da trinca é menor, pois a fibra de carbono é responsável por aumentar a resistência do compósito.

Conforme o ângulo é aumentado, a propagação da trinca torna-se mais difícil, pois há uma alta transferência de tensões para as fibras (tanto de cisalhamento quanto de tensões normais), resultando em alta deformação na ponta da trinca. Em contraste, compósitos com um ângulo abaixo de $\pm 75^\circ$ reduzem as deformações ao redor da ponta da trinca.

A Figura 70 mostra a variação da tensão ao redor da ponta da trinca do compósito para diferentes orientações da fibra. A partir dos resultados, observar-se que a tensão máxima ocorre quando a angulação das fibras é de $\pm 75^\circ$. Compósitos com fibras orientadas a $\pm 15^\circ$ têm um valor menor por serem praticamente paralelos à propagação da trinca, não oferecendo impedimento para o avanço da trinca. Observando que com ângulos menores, apenas a matriz praticamente absorve a energia, resultando em uma distribuição de baixa tensão em torno da ponta da trinca.

Figura 70 Variação da tensão para $U_{máx}$ ao redor da ponta da trinca do compósito para diferentes orientações da fibra



Fonte: Autor

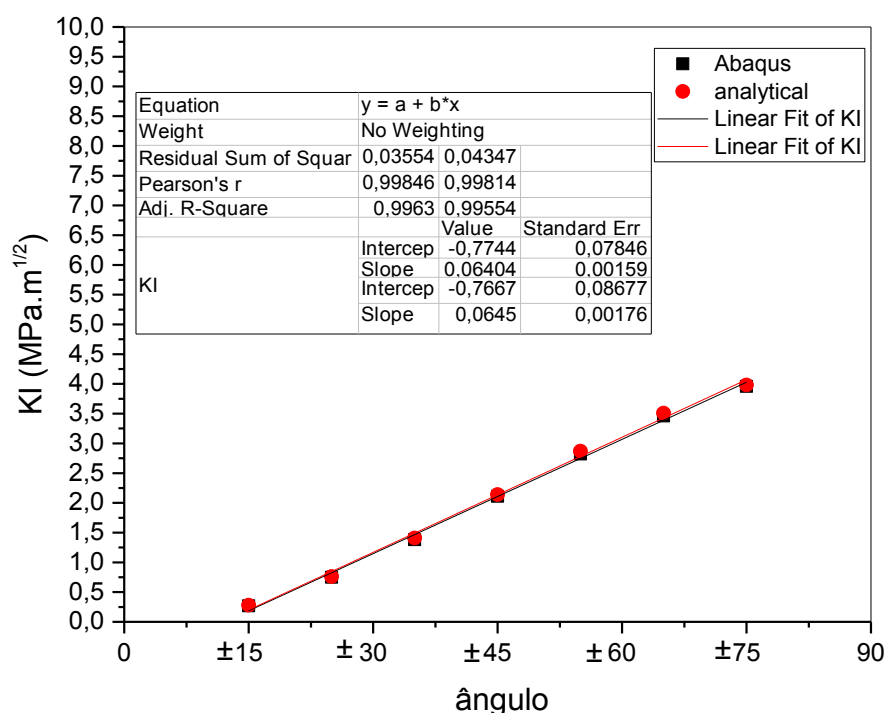
A partir de $\pm 75^\circ$ e em ângulos maiores, os resultados revelam uma alta interação fibra-matriz, permitindo maiores tensões de cisalhamento e tensões de tração normais na interface e, assim, criando um aumento de tensão na região da ponta da trinca.

As fibras ficam mais paralelas ao carregamento com ângulos menores, configurando uma tensão mais uniforme ao redor da trinca e resultando em uma redução na tensão da trinca.

A Figura 71 mostra como o fator de intensidade de tensão varia de acordo com a variação na orientação da fibra. Os resultados mostram que o compósito com um ângulo de $\pm 75^\circ$ recebeu a tensão máxima. À medida que a angulação diminui para $\pm 15^\circ$, as fibras são mais ou menos aproximadamente paralelas à frente da trinca. Quando analisada do ponto de vista da micromecânica, a frente da ponta de fissura não apresenta dificuldades para o avanço, uma vez que a tensão é praticamente transferida para a matriz do concreto. Isso resulta na distribuição do fator de intensidade de baixa tensão em torno da ponta da trinca. Além disso, o comportamento de KI em função do ângulo das fibras no laminado é linear tanto para o modelo numérico quanto para o analítico, sendo a inclinação da reta de 0,064 e 0,065, respectivamente. Por meio de um tratamento estatístico, observa-se que o coeficiente de correlação de Pearson se aproxima do valor de $r = 1$, indicando uma forte correlação entre os dois valores de KI e a orientação da fibra. Esses resultados são satisfatórios porque a variação entre os modelos é

baixa.

Figura 71 Variações de KI com ângulo de orientação da fibra para tensão máxima



Fonte: Autor

Com relação ao compósito $\pm 75^\circ$, do ponto de vista micromecânico, há uma chance maior de que a trinca encontre as fibras que transferem as tensões da matriz para a fibra. Essas tensões são normais na interface fibra/matriz e tensões de cisalhamento, resultando em um fator de intensidade de alta tensão em torno da ponta da trinca. Para ângulos de $\pm 75^\circ$ e acima, o número de fibras contínuas compartilhando a pressão uniformemente aplicada no campo distante também aumenta a intensidade, resultando em uma redução no fator de intensidade de tensão em torno da ponta da trinca.

Os resultados observados foram consistentes com os encontrados por outros autores, como (GEBRU e JAIN, 2018), onde o aumento da variação do ângulo da fibra aumenta o KI dos compósitos laminados com matriz de poliéster e fibra de carbono.

Sousa (2019) observou um aumento no KI dependendo do tipo de fibra, comprimento e concentração de fibras na matriz e adesão interfacial. Quanto maior o comprimento e mais alinhada a fibra na matriz, maior o KI nos resultados experimentais. Além disso, a trinca viaja ao longo dos defeitos criados nas extremidades das fibras e junto à interface. Isso indica que ao considerar a adesão perfeita entre a fibra e a matriz e que tem uma boa correlação com o possível desempenho real do compósito.

Ahmet (2016) estudou sobre o uso de fibras de carbono em concretos entre a faixa de

0,25% e 1,00%, e observou que a inclusão de fibra não afetou o módulo de elasticidade de concreto significativamente, mas a capacidade de deformação do concreto sob compressão aumentou significativamente no pico de carga. Isso se tornou mais dominante após dosagem de fibra de 0,50%. Tanto na divisão da resistência à tração quanto na resistência à tração à flexão de o concreto aumentou com o aumento do teor de fibra de carbono. A única diferença é que o efeito benéfico da fibra de carbono foi observado para resistência à tração à flexão, mesmo em baixas dosagens, mas a divisão da resistência à tração exigiu dosagens significativamente altas como 0,75% e 1,0% para mostrar uma melhoria.

Além disso, a fibra de carbono também melhorou a capacidade de carga, energia de fratura e resistência do concreto. A fração de volume da fibra era fator mais proeminente a este respeito. Especialmente energia de fratura mostrou melhor desempenho além de 0,50% de inclusão de fibra. Os outros parâmetros de fratura, como comprimento efetivo de trinca, tensão fator de intensidade e deslocamento crítico de abertura da ponta de trinca foram também melhorado pelo uso de fibra de carbono. Esta melhoria foi mais distinta após dosagem de fibra de 0,50%. Portanto, foi concluído que aquela dosagem mínima de 0,50% de fibra de carbono foi necessária para obter quantidade satisfatória de melhoria em concreto de alta resistência.

Apesar do estudo mencionado ser sobre fibras curtas, é importante observar a efetividade das fibras de carbono quando inseridas na matriz cimentícia. O mesmo comportamento mecânico foi observado nesta pesquisa, que verificou que elas aumentaram o fator de intensidade de tensão do concreto, possibilitando o uso de fibras de carbono em diversas configurações na matriz.

Com relação aos compósitos de concreto e fibras, tanto as fibras curtas quanto as longas aumentam o KI, conforme mostram os estudos de (CARPINTERI, FORTESE, *et al.*, 2017; MARAWAN, AGWA, *et al.*, 2020; EKATERINA e VLADIMIR, 2019; LAMPROS e DIONYSIOS., 2017), indicando o bom potencial do uso de fibras de carbono em uma matriz cimentícia. Esses pesquisadores observaram o aumento da resistência à flexão e da tenacidade à fratura com as fibras alinhadas, mesmo comportamento observado neste estudo.

Foi demonstrado que fórmulas analíticas podem fornecer uma descrição muito precisa dos resultados numéricos em uma ampla gama de orientações de fibra no laminado para determinar o fator de intensidade de tensão em materiais compósitos. Vale ressaltar que para que isso fosse possível, foi necessário considerar a adesão perfeita entre a fibra e a matriz e tratar o concreto como isotrópico na análise.

Ao considerar essas restrições, os laminados apresentam características anisotrópicas com propriedades mecânicas nas direções x e y, que foram adotadas no modelo baseado na

teoria dos laminados. Nesse modelo, nota-se que a orientação das fibras influencia a tensão resultante na ponta da trinca. Como este estudo considerou uma interação perfeita entre as camadas, as tensões entre elas não foram analisadas.

A técnica de inserção de trinca no modelo numérico foi satisfatória para o estudo da mecânica da fratura desse laminado — levando em consideração todas as considerações adotadas ao modelo, já que o abaqus tem algumas limitações quanto ao uso em determinados materiais.

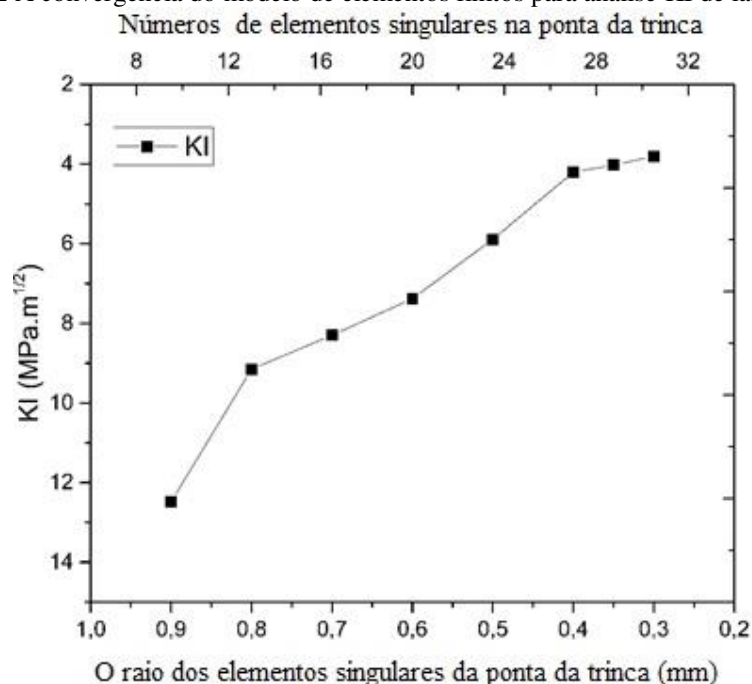
Além disso, a/W tem um fator determinante no fator de tenacidade à fratura, como visto nos estudos de (CARPINTERI; GIOVANNI *et al.*, 2017; VANTADORI; CARPINTERI *et al.*, 2016). Eles observaram que a situação crítica ocorre quando $a/w = 0,5$, que foi o valor adotado naquela análise. Ou seja, o presente estudo obtém valores de KI próximos à falha do material deste estudo.

A técnica integral J no Abaqus mostrou-se satisfatória para encontrar o KI no laminado de acordo com os dados encontrados pelo método analítico. Na análise numérica realizada por Seleem e Ghada (2019), foi observado que fator de intensidade de tensão, KI_C , depende da espessura da amostra e está reduzindo após aumentar a espessura da amostra. Além disso, segundo o mesmo pesquisador, o fator de intensidade de tensão depende da resistência do concreto e está aumentando com o aumento deste. Isso indica que ao aumentar a resistência do concreto há um aumento do fator de intensidade de tensão.

7.4 Modelo numérico para determinação do fator de intensidade — *Center-Cracked Tension (CCT)*

Os resultados nessa seção são referentes aos item [6.4](#). Com relação ao estudo de análise de convergência, notou-se que à medida que o raio diminui e o número de elementos na ponta da trinca aumenta, os valores de KI tendem a convergir. Isso é mostrado na Figura 72. O laminado usado nesta análise foi de $\pm 45^\circ$.

Figura 72 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados-FEM



Fonte: Autor.

Os resultados das simulações estão resumidos na Tabela 13. Pode-se notar através da tabela que conforme o raio diminui, o KI de interesse começa a convergir para um determinado valor. A Figura 72 e a Tabela 13 mostram os refinamentos da malha. Se nenhuma mudança mais considerável no resultado for observada, então considera-se finalizado o procedimento. O erro final foi de 1,1% para um raio de 1 mm, 26 elementos na ponta da trinca.

Tabela 13 Parâmetros de análise de convergência – FEM

R Trinca(mm)	Nº de elementos na ponta da trinca	Malha	SIF $MPa\sqrt{m}$	erro(%)
0.8	10	10	9,15	143,4
0.7	14	7	8,299	120,7
0.6	16	6	7,378	96,2
0.5	21	5	5,888	56,6
0.4	24	4	4,20	11,7
0,35	25	3,5	4,025	7,0
0,3	26	3	3,802	1,1

Fonte: Autor

A Tabela 14 mostra os valores referentes ao fator de intensidade de tensão obtidos após a análise no Abaqus usando XFEM; podemos observar que conforme o número de elementos

aumenta-diminuição da malha, há uma queda no fator de intensidade de tensão até que estabiliza em KI de 3,6.

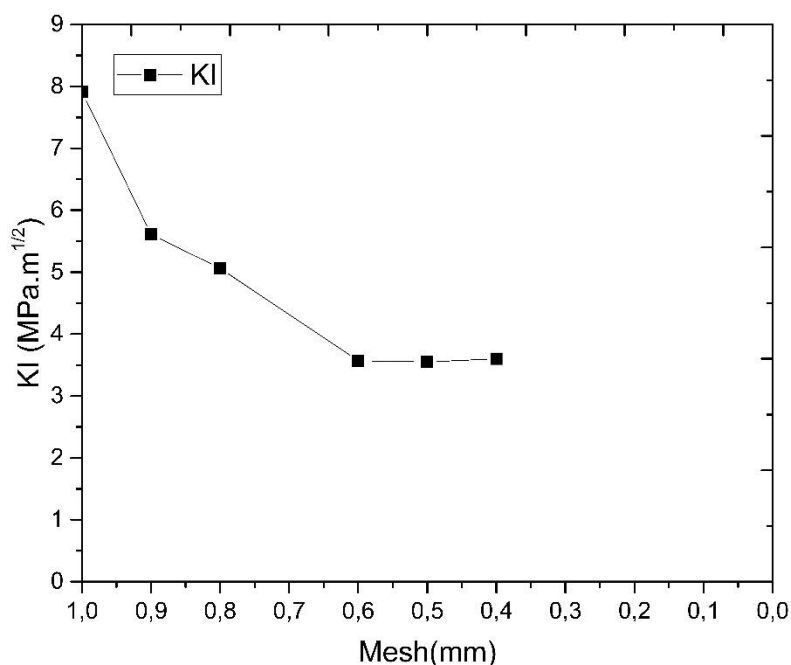
Tabela 14 Parâmetros de análise de convergência - XFEM

Tamanho da malha- mm	SIF $MPa\sqrt{m}$
1	7,912
0,9	5,61
0,8	5,064
0,6	3,57
0,5	3,55
0,4	3,6

Fonte: Autor

A Figura 73 apresenta o gráfico referente à análise de convergência do modelo laminado XFEM. Como pode ser visto, há uma tendência de convergência com tamanhos de malha menores. Vale ressaltar que a trinca deve estar entre a malha. Caso contrário, há um erro na simulação durante a análise no ABAQUS.

Figura 73 A convergência do modelo de elementos finitos para análise KI de laminados-XFEM

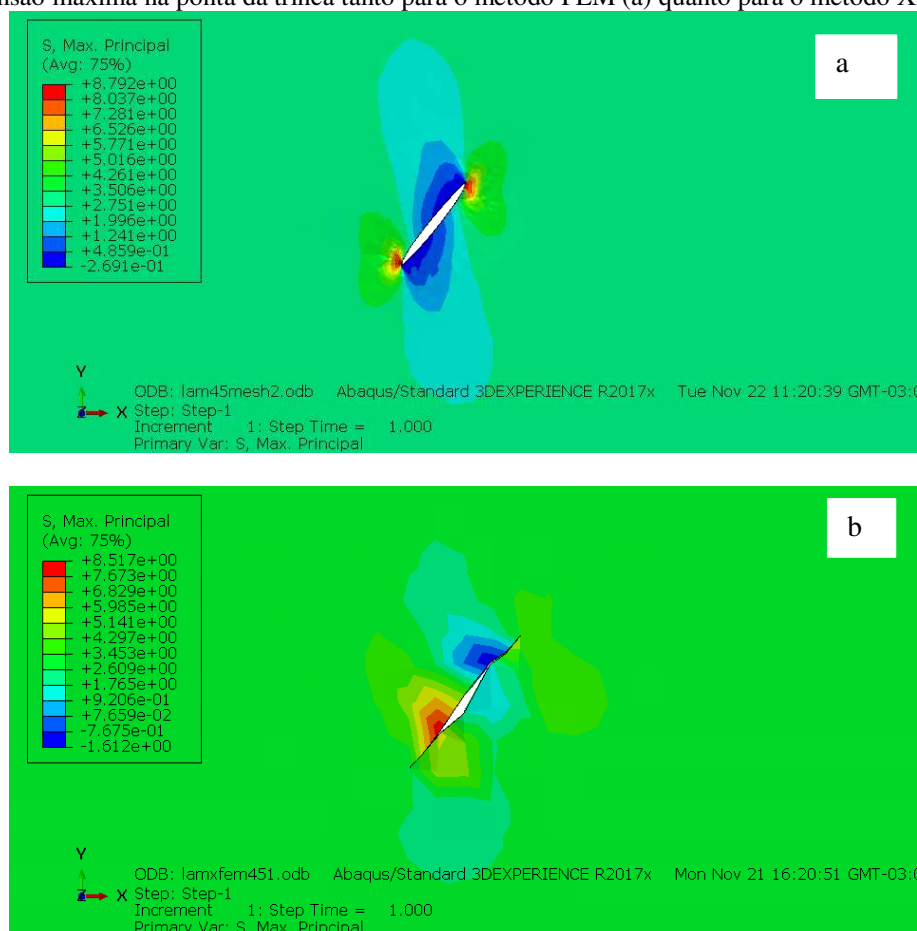


Fonte: Autor

As Figura 74a e Figura 74b mostram a tensão máxima na ponta da trinca tanto para o método da integral-J (FEM) quanto para o método usando XFEM, onde observamos que a

técnica FEM da integral J foi mais eficiente em visualizar a tensão nesta região em relação ao método XFEM. No método dos anéis ao redor da ponta da trinca, foram observadas regiões mais homogêneas e concentradas, enquanto para o segundo método-XFEM, observou-se uma região de tensão mais dispersa.

Figura 74 Tensão máxima na ponta da trinca tanto para o método FEM (a) quanto para o método XFEM(b)



Fonte: Autor

A Tabela 15 mostra os resultados dos dois métodos numéricos (FEM e XFEM). Pode-se observar que o laminado com ângulo de fibra de 75° em uma trinca a 15° apresentou maior valor de KI e tensão máxima de aproximadamente $5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ e 11 MPa , respectivamente. O KI aumentou de aproximadamente $1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ para $5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, o que é equivalente a um aumento de $\times 5$ em relação ao laminado de ângulo de fibra $[(0/\pm 15)_4]_s$ em uma trinca a 75° .

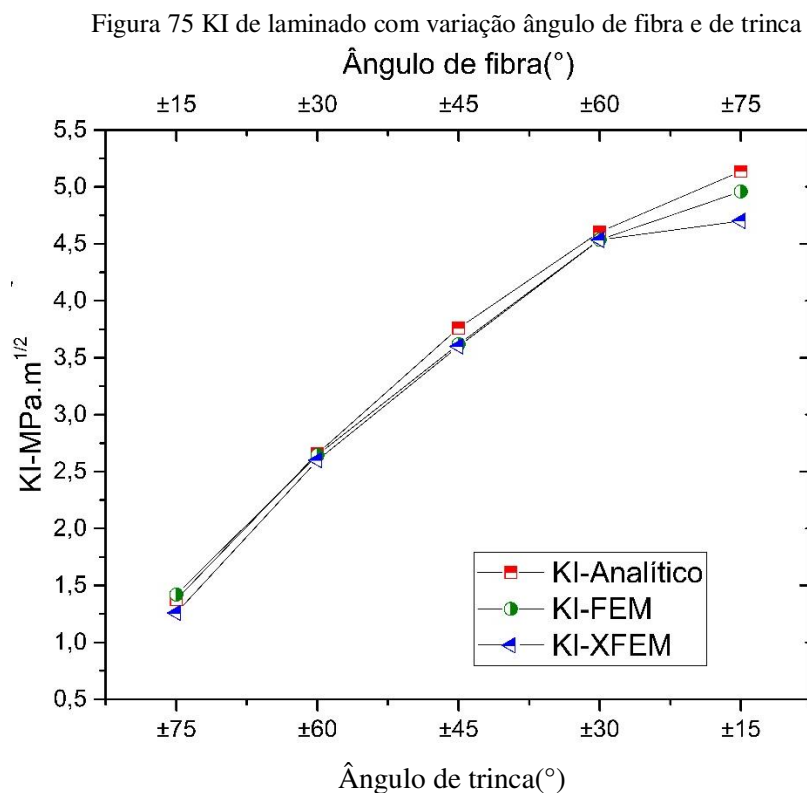
Com relação à tensão na ponta da trinca, há um aumento significativo de aproximadamente 120% no laminado com ângulo de trinca de 15° /fibra 75° em relação ao compósito $[(0/\pm 15)_4]_s$ com os 75° combinação de ângulo de trinca. O laminado com a combinação de ângulo de fibra 45° $[(\pm 45)_4]_s$ e ângulo de trinca apresentou valores intermediários — um aumento de aproximadamente 56% em relação ao laminado $[(0/\pm 15)_4]_s$.

Tabela 15 Tensões máximas e KI e para os laminados com diferentes ângulos de orientação

Ângulo de trinca (°)	Ângulo de fibra (°)	ANAL. KI MPa√m	ABAQUS KI FEM MPa√m	ABAQUS KI XFEM MPa√m	Tensão - MPa FEM	Tensão MPa XFEM
75	±15	1,376	1,419	1,258	5,17	5,127
60	±30	2,659	2,645	2,60	7,4	6,981
45	±45	3,760	3,618	3,60	8,79	8,77
30	±60	4,605	4,537	4,535	9,953	10,35
15	±75	5,136	4,959	4,70	10,65	11,31

Fonte: Autor

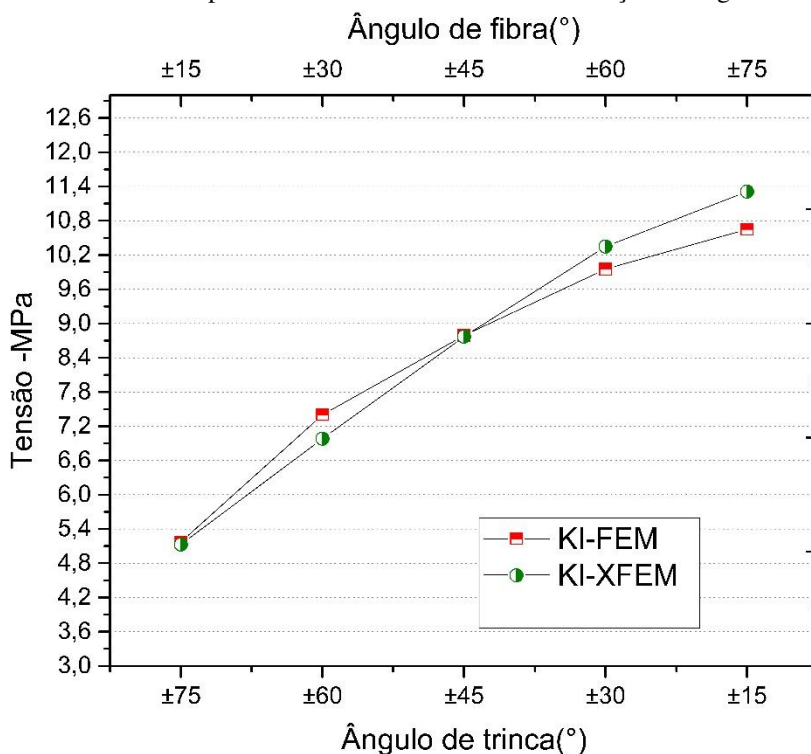
Pode ser visto no gráfico que o comportamento do fator de intensidade de tensão é linear tanto para o ângulo da fibra quanto para o ângulo da trinca. De acordo com a análise do gráfico (Figura 75), nota-se que à medida que o ângulo da fibra aumenta, combinado com a angulação da trinca, há um aumento no fator de intensidade de tensão. Esse comportamento pode ser observado ao utilizar o *Single edge notch bending* (SENB) no qual a fibra de carbono funciona como uma barreira à propagação de trincas, aumentando assim o fator de intensidade de tensão nessa região. O maior valor do fator de intensidade de tensão KI foi para um ângulo de fibra maior e um ângulo de trinca menor.



Fonte: Autor

O gráfico (Figura 76) mostra que na simulação 1-FEM usando integral de contorno e usando XFEM; há uma queda de tensão à medida que o ângulo da trinca aumenta. Ou seja, o compósito com a combinação de ângulo de trinca 15° e ângulo de 75° da fibra apresentou maior tensão nesta região devido ao efeito da orientação da fibra nesta região que proporciona maior tensão de tração.

Figura 76 Tensão máxima na ponta da trinca de laminado com variação de ângulo de fibra e de trinca



Fonte: Autor

Como visto no parágrafo anterior, o efeito da orientação das fibras influencia no aumento da tensão na região da ponta da trinca e no aumento do fator de intensidade da tensão. Além disso, uma trinca próxima a 75° tem pouca influência sobre uma trinca de 15° com uma combinação de fibras de 75° .

Pode-se observar que tanto a técnica FEM quanto a XFEM podem ser utilizadas para determinar a tensão na região da ponta da trinca. No entanto, ambos diferem dos métodos — o XFEM não precisa usar anéis na ponta da trinca. Contudo, a simulação usando XFEM é limitada à situação estática linear para determinar o fator de intensidade de tensão e os elementos que podem ser usados são do tipo *Hex*.

No compósito laminado $75^\circ [(0/\pm 75)_4]_s$ há uma chance maior da trinca encontrar as fibras, transferindo as tensões da matriz para a fibra. Essas tensões na interface fibra/matriz e

tensões de cisalhamento são normais, resultando em um fator de alta intensidade de tensão ao redor da ponta da trinca. A configuração do laminado $[(0/\pm 15)_4]_s$ e com ângulo de trinca de 75° apresentou o menor valor de tensão na região da ponta da trinca, como pode ser observado no gráfico. Essa menor tensão ocorre porque as fibras estão com uma angulação menor, diminuindo a tensão nessa região.

Os resultados observados foram consistentes com os encontrados por outros autores, como (GEBRU, 2018), onde observa-se que o aumento da variação do ângulo da fibra aumenta o KI dos compósitos laminados com matriz de poliéster e fibra de carbono. De acordo com Bangaru *et al.*, (2021), alterando o ângulo de orientação da lâmina fora do eixo e a magnitude da carga uniaxial, as misturas de modos e as taxas de liberação de energia na ponta da trinca podem variar.

Conforme Prashanth *et al.* (2021), a tenacidade à fratura foi significativamente maior no compósito laminado $(0/0)_{3s}$ - do que em outros compósitos híbridos de fibra natural de juta-banana com outras configurações $(0/45)_{3s}$, $(0/90)_{3s}$, e $(+45/-45)_{3s}$.

Segundo Chittimenu *et al.* (2021), os compósitos compreendem uma matriz frágil com uma fibra de alto módulo, que se destina a aplicações estruturais. Assim, a tenacidade à fratura pode ser avaliada para esses materiais usando a abordagem mecânica da fratura elástica linear (LEFMs). Fator de intensidade de tensão e energia de fratura são os principais termos usados para avaliar a tenacidade à fratura de compósitos reforçados com fibras. No caso da matriz dúctil, o procedimento Integral-J pode ser aplicado.

Para concreto e compósitos de fibras, tanto as fibras curtas quanto as longas aumentam o KI, conforme demonstrado nos estudos de Carpinteri *et al.* (2017) e Saad *et al.* (2022), e da matriz cimentícia. Isso mostra o excelente potencial do uso de fibra de carbono. Esses pesquisadores observaram aumento da resistência à flexão e tenacidade à fratura usando fibras alinhadas, o mesmo comportamento observado neste estudo. Foi demonstrado que uma fórmula analítica direta pode representar com precisão os resultados numéricos para uma ampla gama de direções de fibra em laminados para determinar os fatores de intensidade de tensão dos compósitos.

Uma aderência perfeita entre as fibras e a matriz deve ser levada em consideração, e o concreto deve ser tratado como isotrópico na análise. Considerando essas limitações, o laminado apresenta propriedades anisotrópicas com propriedades mecânicas nas direções x e y adotadas no modelo baseado na teoria dos laminados.

Observe que neste modelo anisotrópico, a orientação das fibras afeta a tensão gerada na ponta da trinca. As tensões interlaminares não foram analisadas, pois este estudo considerou as

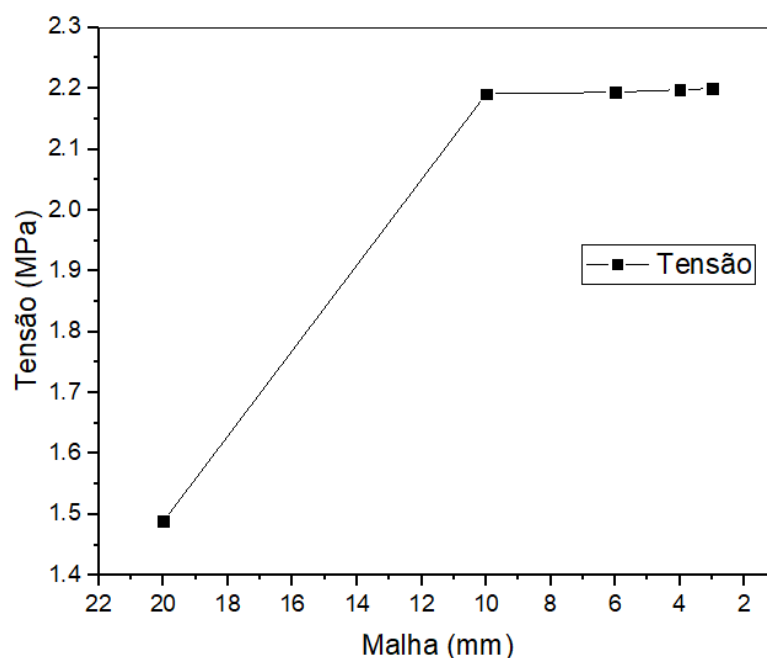
interações interlaminares totais. A técnica integral J no ABAQUS mostrou-se satisfatória em encontrar o KI no laminado de acordo com os dados encontrados pelo método analítico.

7.5 Modelo – Argamassa reforçada com fibras de carbono

7.5.1 Modelo numérico de dano (análise não linear)

Os resultados nessa seção são referentes ao item [6.5.1](#). A partir da Figura 77, observa-se que há tendência de convergência. Para melhor visualização da trinca, posteriormente, adotou-se a malha 2 mm.

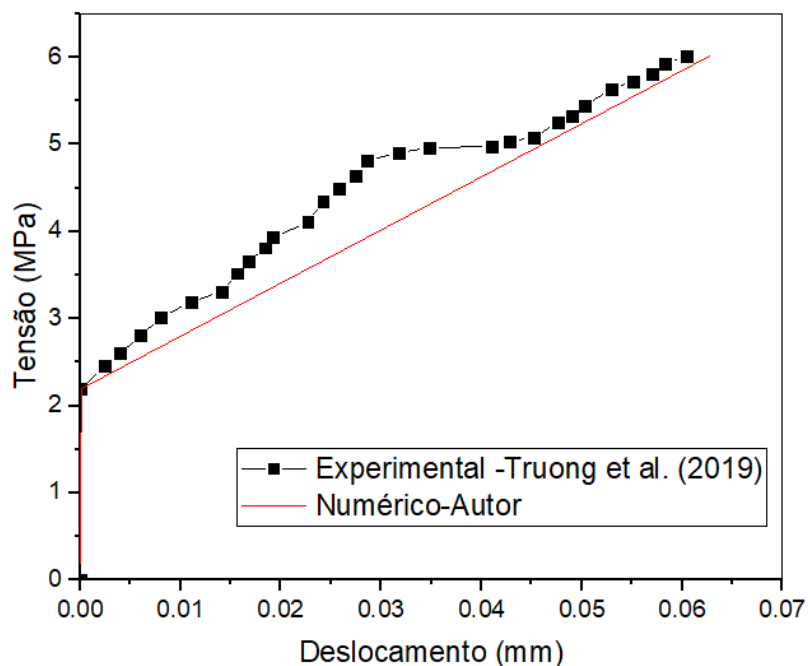
Figura 77 Análise de convergência para modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono



Fonte: Autor

Conforme a Figura 78, há a comparação dos resultados tanto experimental como numérico, observa-se que ambos estão de acordo, ressaltando que no modelo numérico criado no ABAQUS, apenas é possível inserir os dados de maneira linear. Logo, as quedas de tensão devido às falhas dos filamentos de fibras de carbono ao longo do ensaio foram desconsideradas na análise. Além disso, observam-se duas regiões, uma que é predominante a matriz, até chegar ao ponto de falha e logo em seguida a outra região em que as fibras de carbono são predominantes. Ao empregar o XFEM, a trinca se propaga horizontalmente, levando em consideração o deslocamento na falha no elemento finito.

Figura 78 Gráfico experimental e numérico (calibração e validação do modelo), na primeira região é predominante o comportamento do compósito e na segunda região é a de predominância das fibras



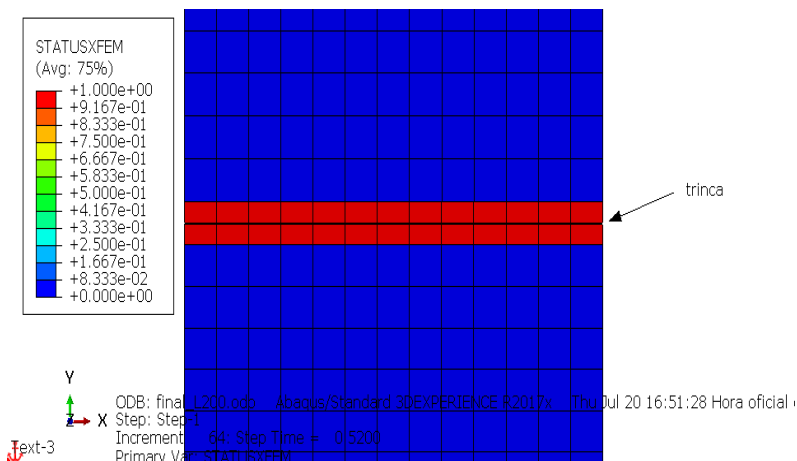
Fonte: Autor

Nota-se através da imagem (Figura 79) a localização da falha do material no modelo numérico que é equivalente ao modelo experimental dos estudos de Truong *et al.* (2019). É importante observar que no ensaio realizado pelos Truong *et al.* (2019) há falha da matriz, porém ainda é considerada a área inicial da amostra, mas dentro da análise real do material a partir da falha da matriz há transferência de energia para a fibra. Logo, a fibra contribui para resistência desse material até a falha e a interação interfacial entre os dois materiais é de fundamental importância para a transferência de energia.

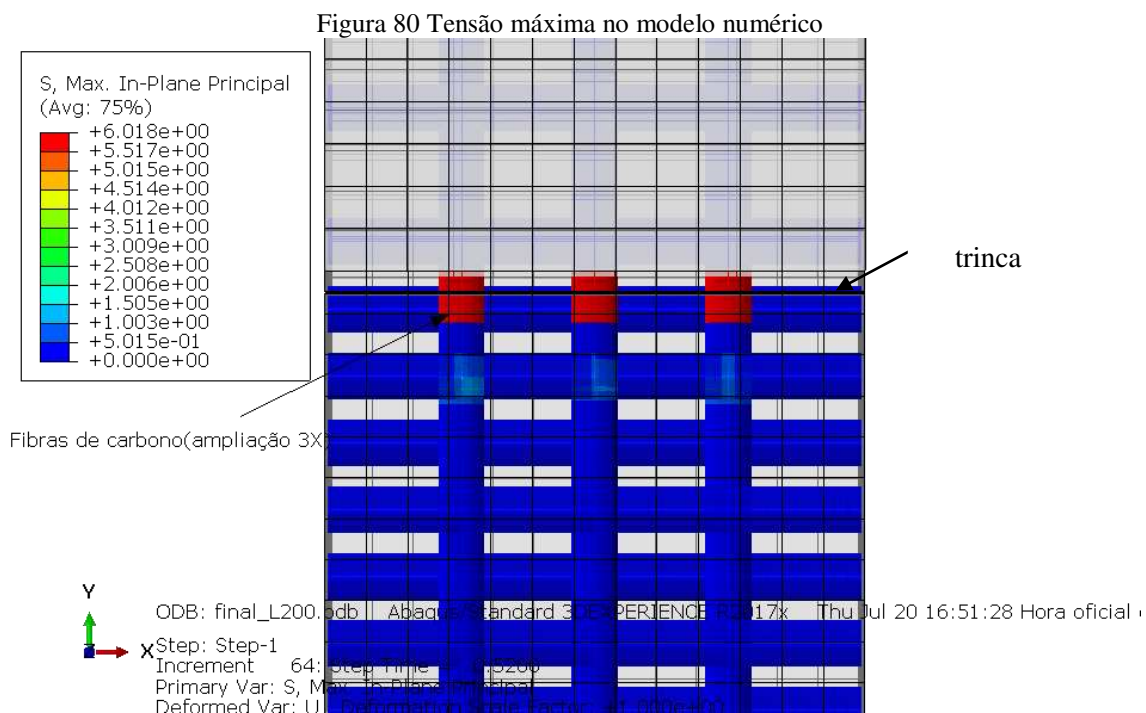
Figura 79 Comparação entre modelo experimental de Truong et al. (2019) e numérico do Autor
a) b) Autor



A região em vermelho indica que o material falhou (STATUSXFEM +1) ao alcançar o deslocamento na falha



A Figura 80 mostra a tensão nas fibras (ampliação 3x na figura) após a falha da matriz no modelo numérico. Nesse modelo usando XFEM, nota-se que após a propagação da trinca, toda energia é transferida à fibra de carbono e grande parte dessa energia para manter o material é em decorrência da interação fibra/matriz. Nesse modelo, a trinca ocorreu após a matriz alcançar a tensão máxima e deslocamento da falha.

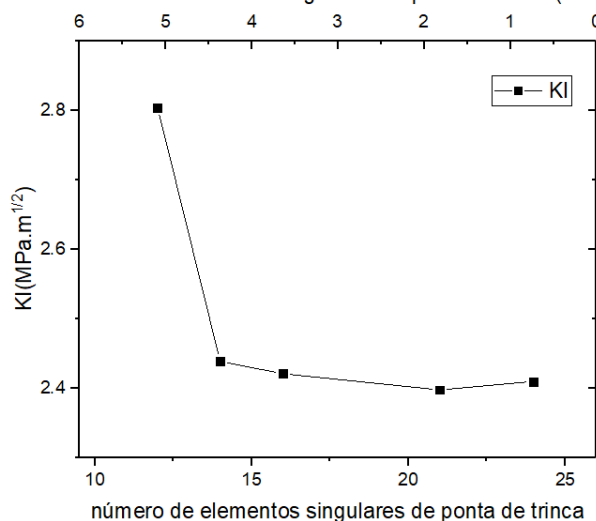


Fonte: Autor

7.5.2 Modelo numérico para determinação do fator de intensidade de tensão (análise linear)

Os resultados nessa seção são referentes ao item [6.4.2](#). Os resultados da análise de convergência do modelo numérico está representado na Figura 81, onde é possível notar que há uma tendência de convergência. É importante também notar que o fator de intensidade de tensão varia de acordo com o contorno — além disso, é necessário desconsiderar os primeiros contornos devido à interferência no resultado.

Figura 81 Análise de convergência do modelo numérico usando FEM o raio dos elementos singulares da ponta da trinca(mm)



Fonte: Autor

Conforme a Tabela 16, verifica-se que no ângulo de 15° apresentou o maior valor do fator de intensidade de tensão no compósito bidirecional modelado no ABAQUS. e o menor valor foi obtido um ângulo de 75° da trinca, tanto usando FEM como XFEM, e o valor intermediário foi obtido com um ângulo de 45°. Além disso, nota-se que a diferença entre os dois métodos não foi tão significativa, logo, os dois métodos podem ser utilizados. Entretanto, como foi visto na primeira parte, a visualização da trinca é melhor observada no método no FEM utilizando os anéis. A diferença é que nesse tipo de modelo de compósito há uma interferência no fator intensidade da tensão em decorrência da ancoragem das fibras no modelo numérico. Em contrapartida, no primeiro método, as equações dos laminados foram usadas para obter as propriedades do material.

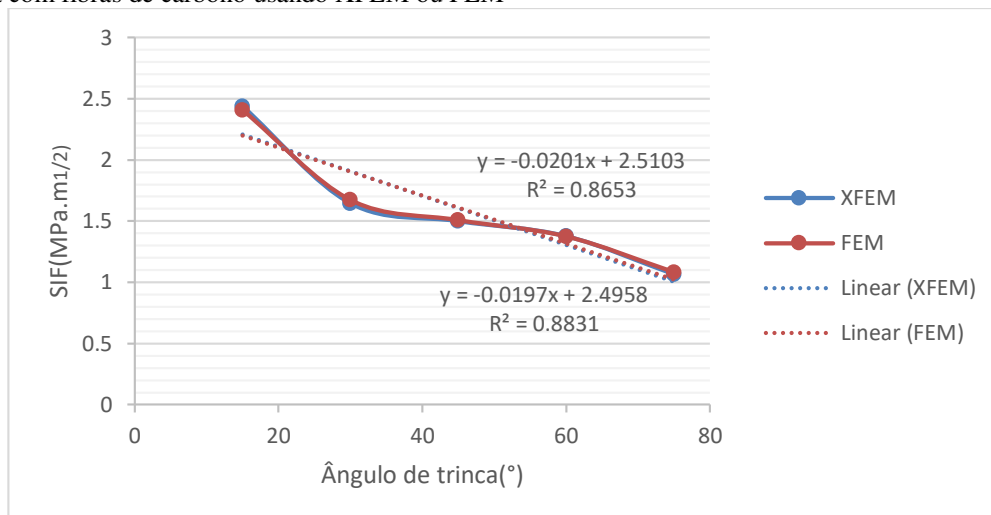
Tabela 16 Fator de intensidade de tensão numérico para argamassa reforçada com fibras de carbono usando FEM e XFEM

Ângulo da trinca	K_I MPa.m^{1/2}FEM	K_I MPa.m^{1/2} XFEM
15°	2,41	2,439
30°	1,675	1,647
45°	1,51	1,501
60°	1,377	1,378
75°	1,085	1,067

Fonte: Autor

No gráfico (Figura 82), nota-se uma tendência de linearidade do comportamento no material em função do ângulo de trinca e o fator de intensidade de tensão. Observa-se que o compósito na direção de 90° influenciou no comportamento do material quando submetido ao esforço de tração. Como foi feita apenas a modificação do ângulo de trinca, ocasionou um desvio no fator de intensidade de tensão. Sabe-se que há certa variação do fator intensidade tensão com a malha dos elementos finitos e ao longo do número de contornos analisados. Nesse caso, utilizou-se o valor mais próximo da diferença do elemento finito para o uso do elemento FEM. No XFEM não há necessidade de na ponta da trinca fazer a malha localizada tipo “teia de aranha” como na simulação com FEM.

Figura 82 Gráfico das funções das relações entre ângulo de trinca e fator de intensidade de tensão para argamassa reforçada com fibras de carbono usando XFEM ou FEM

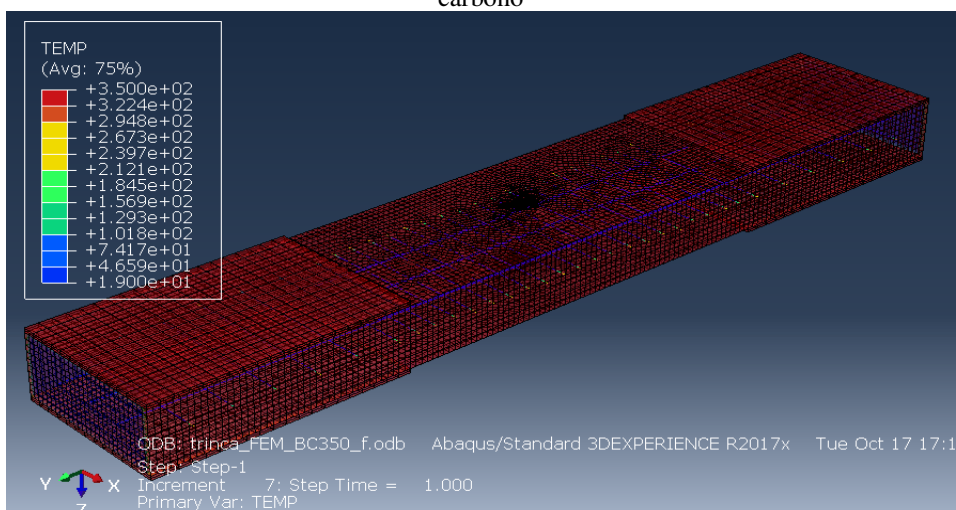


Fonte: Autor

7.5.3 Modelo termomecânico para determinação fator de intensidade de tensão, CMOD e temperatura (análise linear)

Os resultados nessa seção são referentes ao item [6.5.3](#). A Figura 83 mostra como a condição de contorno de 350°C conduz ao fluxo térmico que é direcionado para o interior do corpo de prova. Vale ressaltar que só foi considerada a condução do calor no material. Conforme foram os experimentos realizados pelos autores, há uma alteração do módulo de elasticidade do material conforme o aumento da temperatura; essa alteração do modelo irá alterar substancialmente o fator de intensidade de tensão do material, além das disposições das fibras, impedindo a abertura da trinca.

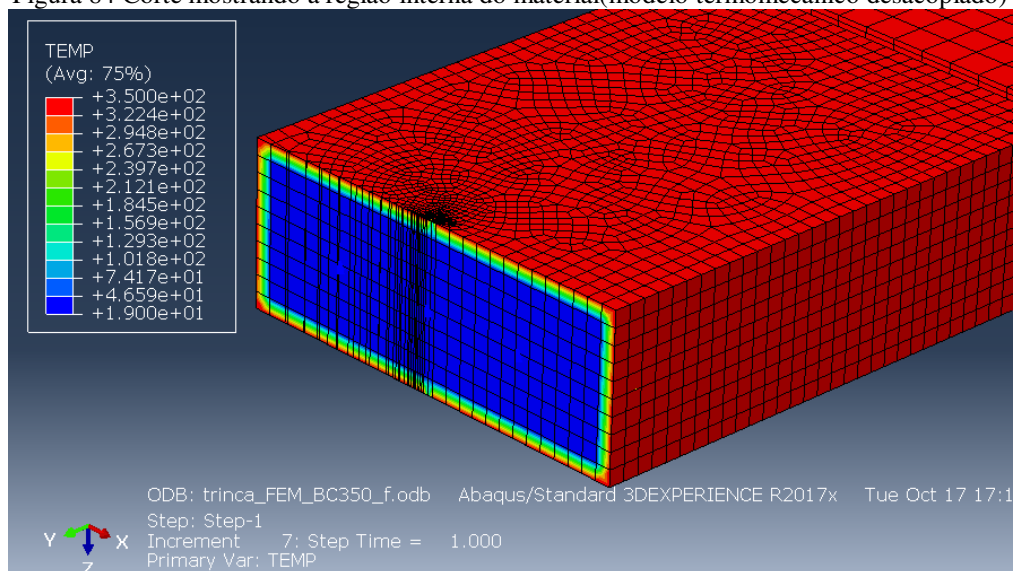
Figura 83 Condição de contorno modelo termomecânico desacoplado para argamassa reforçada com fibras de carbono



Fonte: Autor

A Figura 84 se trata de um corte mostrando o interior do material, onde observa-se a região da trinca na qual o material foi submetido em 350°C; observa-se como se dá o fluxo de calor ao longo da espessura do corpo de prova.

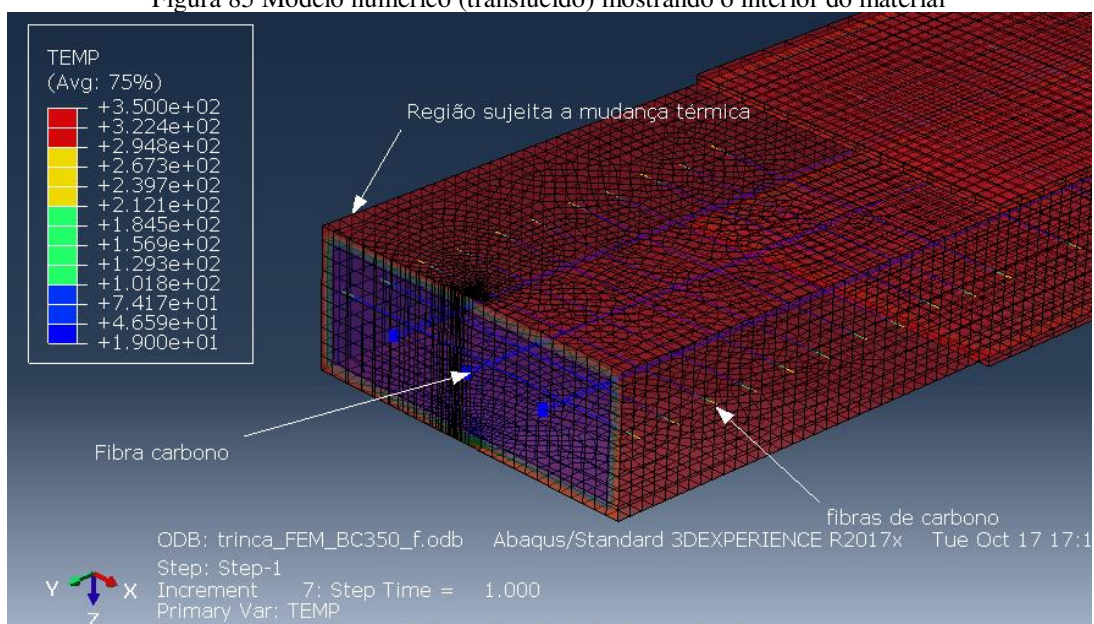
Figura 84 Corte mostrando a região interna do material(modelo termomecânico desacoplado)



Fonte:Autor

Na Figura 85, translúcida, pode-se observar a região interna do material onde estão localizadas as fibras de carbono. Nota-se a partir dessa observação que as fibras sofrem pouca interferência do fluxo de calor devido às propriedades térmicas da matriz cimentícia.

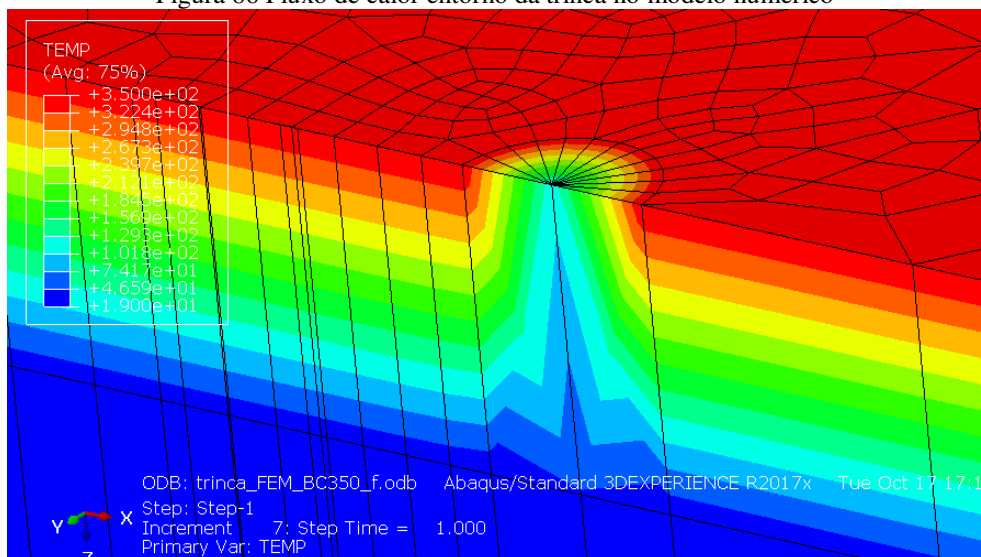
Figura 85 Modelo numérico (translúcido) mostrando o interior do material



Fonte: Autor

Na Figura 86, observa-se como se dá o fluxo de calor ao redor da trinca. Ressalta-se que foi utilizada a condição de contorno na região externa ao raio da trinca, com isso o fluxo de calor tende a ser direcionado ao centro do elemento.

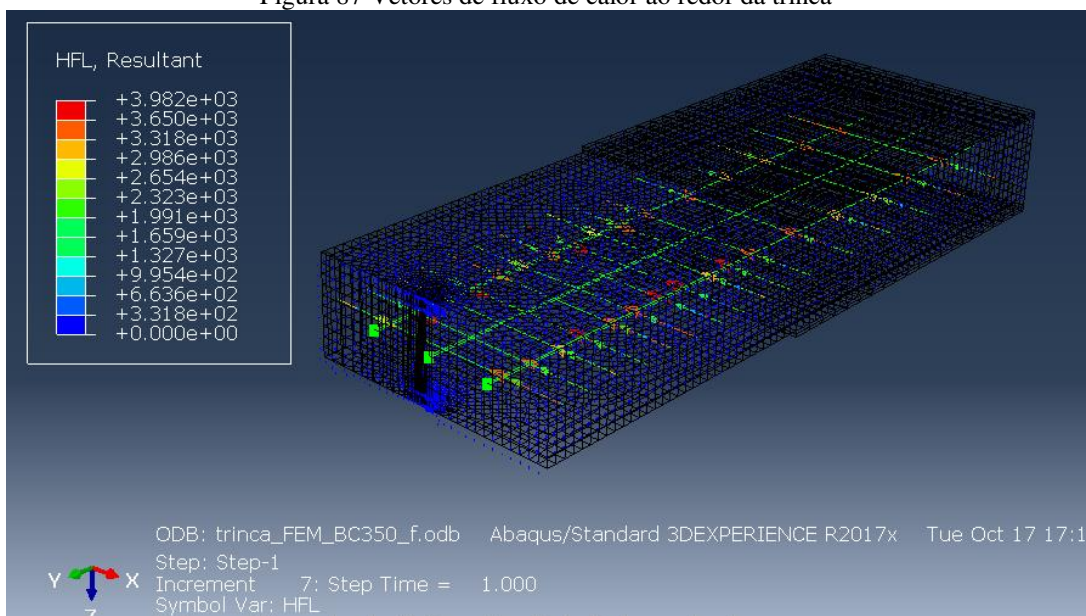
Figura 86 Fluxo de calor entorno da trinca no modelo numérico



Fonte: Autor

Na Figura 87, verificam-se os vetores de fluxo de calor ao redor da trinca usando FEM, perceber se ao adotar esse tipo de análise os vetores tendem a uma configuração circular ao longo da trinca.

Figura 87 Vetores de fluxo de calor ao redor da trinca

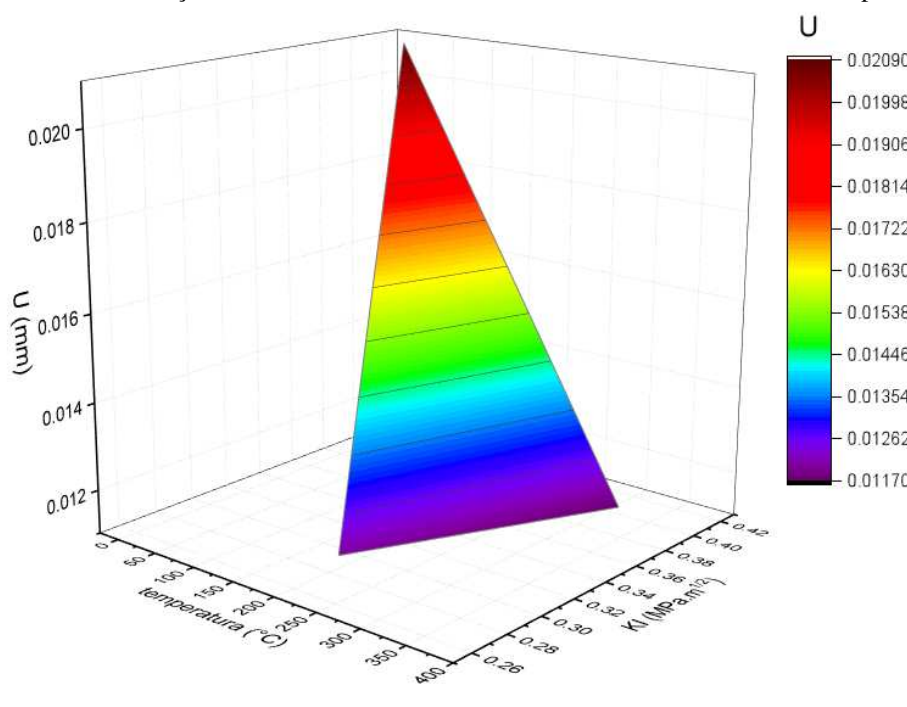


Fonte: Autor

A Figura 88 mostra a relação entre o fator de intensidade de tensão, abertura de trinca e temperatura. Ao analisar o gráfico, percebe-se que na temperatura ambiente o material apresentou um fator de intensidade de tensão de $0.41MPa\sqrt{m}$, já na temperatura $250^{\circ}C$ esse valor teve uma queda, e já na temperatura de $350^{\circ}C$ houve um aumento (o nó usado para essa análise foi ARGAMASSA-1.54416).

Segundo os dados experimentais de Truong *et al.* (2019), na temperatura $350^{\circ}C$, houve um aumento do módulo de elasticidade na primeira região do gráfico proposto pelos autores. Isso impacta diretamente no fator de intensidade de tensão, pois o cálculo da integração J está diretamente relacionada ao fator de intensidade de tensão.

Figura 88 Gráfico relação entre abertura da trinca, fator de intensidade de tensão e temperatura



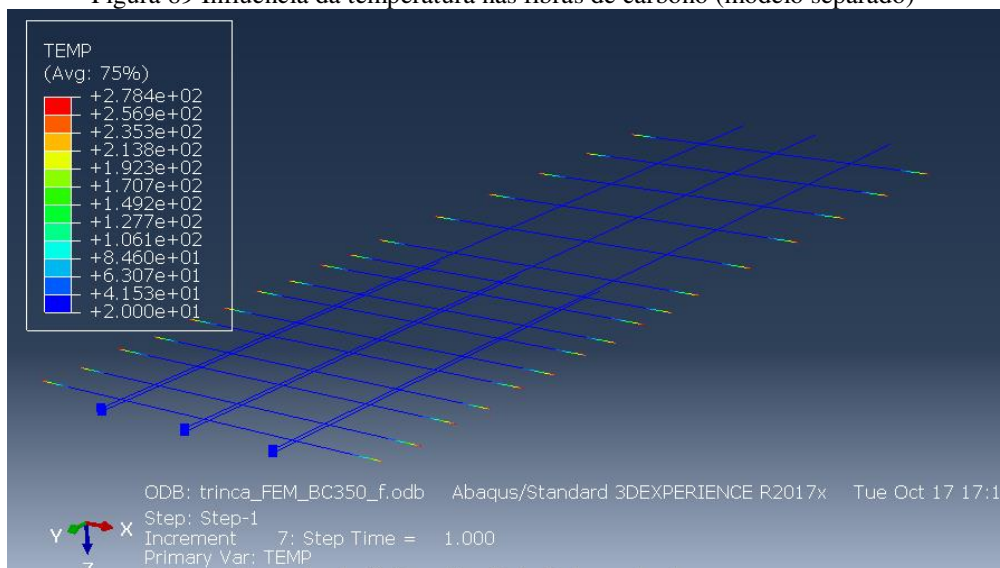
Fonte: Autor

Nota-se que, primeiramente, a fibra de carbono atua como dificultador à abertura da trinca e, como consequência, baixa tensão na região da ponta da trinca. Verifica-se também que há tensões residuais na região externa do material, provocando assim diferenças de expansão da região interna e externa do material. Ademais, comparando com o outro modelo em que utilizou-se as propriedades dos materiais, nota-se que a região de tensão na ponta da trinca é mais notável. Isso é importante de ser comparado entre os dois métodos de análise.

A Figura 89 mostra de forma isolada as fibras de carbono, no caso o material foi submetido a uma temperatura de $350^{\circ}C$. Observa-se que devido a regiões de influência da temperatura na região externa do material há uma variação da expansão da fibras,

consequentemente, a tensões residuais nessas regiões, em contrapartida a região interna do compósito sofreu pouca influência da temperatura, devido ao fato do concreto possuir baixa condutividade térmica.

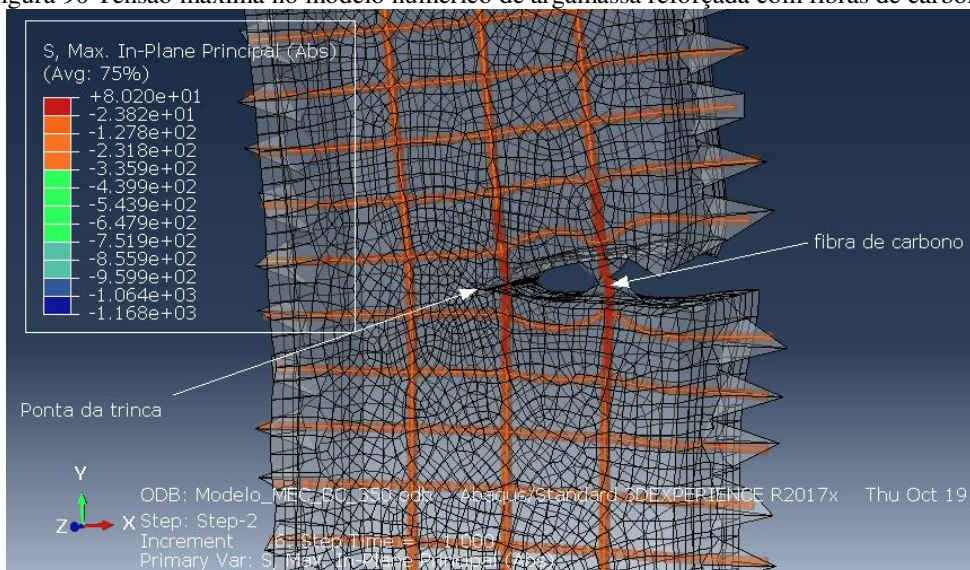
Figura 89 Influência da temperatura nas fibras de carbono (modelo separado)



Fonte: Autor

A Figura 90 mostra a tensão máxima principal nas fibras de carbono. Verifica-se que os pontos de maior tensão estão nas fibras de carbono na região da abertura da trinca e nas fibras próximas da ponta da trinca. Outro fator importante na análise é a deformação da malha na região de arranque da fibra e matriz cimentícia que pode ser constatada através do modelo numérico.

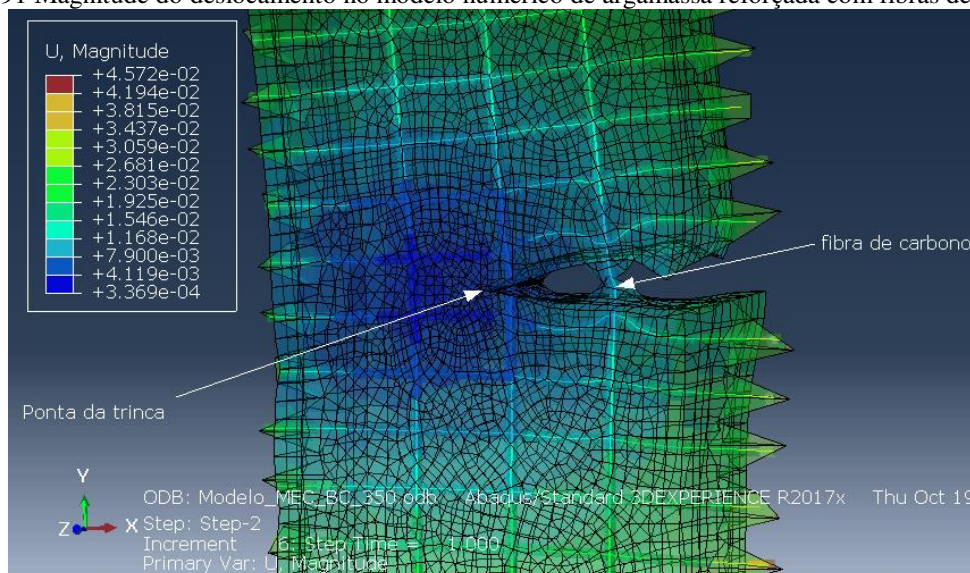
Figura 90 Tensão máxima no modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono



Fonte: Autor.

A Figura 91 apresenta a magnitude do deslocamento total do modelo numérico do compósito. Ela mostra o desenho translúcido, onde notam-se as fibras dentro do material para assim analisar o deslocamento tanto no eixo y, como no eixo x.

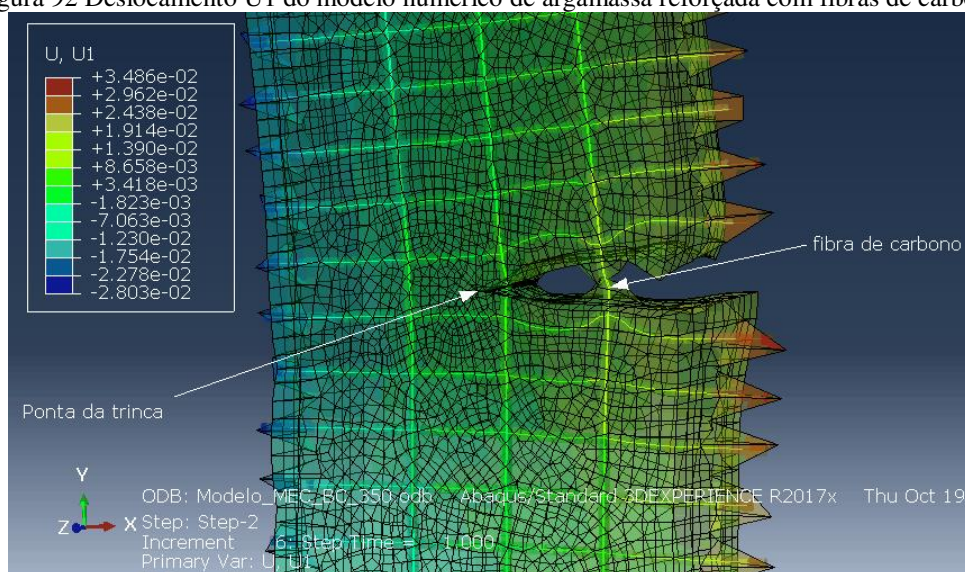
Figura 91 Magnitude do deslocamento no modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono



Fonte: Autor

A Figura 92 representa o deslocamento U1 (deslocamento no eixo x). Aqui há análise de como ocorre a expansão das fibras nas regiões das extremidades em decorrência da temperatura do material.

Figura 92 Deslocamento U1 do modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono



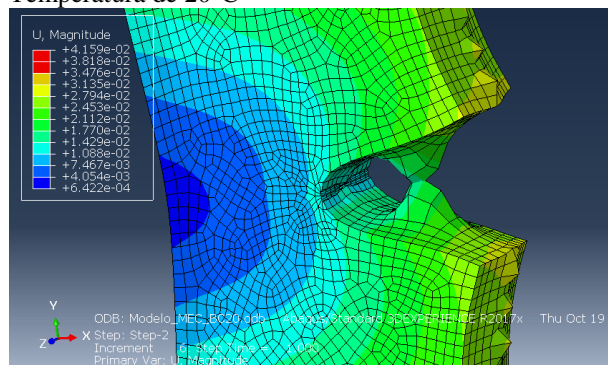
Fonte: Autor

A Figura 93 mostra a evolução da expansão térmica no modelo termomecânico, onde

observa-se o efeito da temperatura na expansão das fibras de carbono nas extremidades do modelo. Nessa região, observou-se o efeito da tensão residual no material. Na Figura 93a, modelo termomecânico na temperatura de 20 °C Figura 93b, na temperatura 250°C, Figura 93c, na temperatura 350°C.

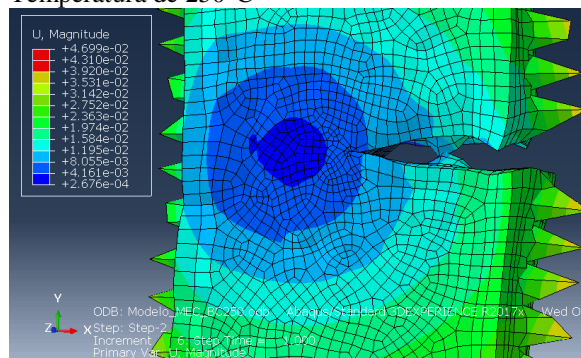
Figura 93 Sequência de deformações provocadas pela mudança de temperatura no modelo numérico

Temperatura de 20°C



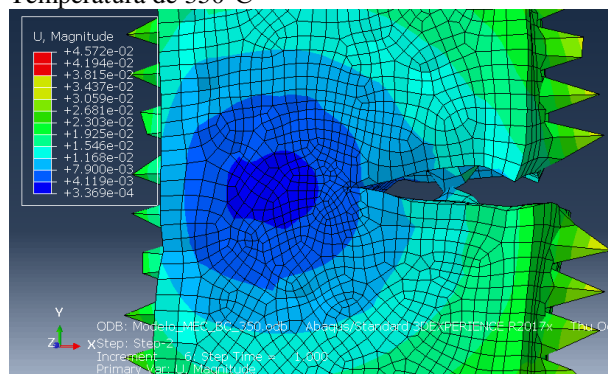
A

Temperatura de 250°C



B

Temperatura de 350°C

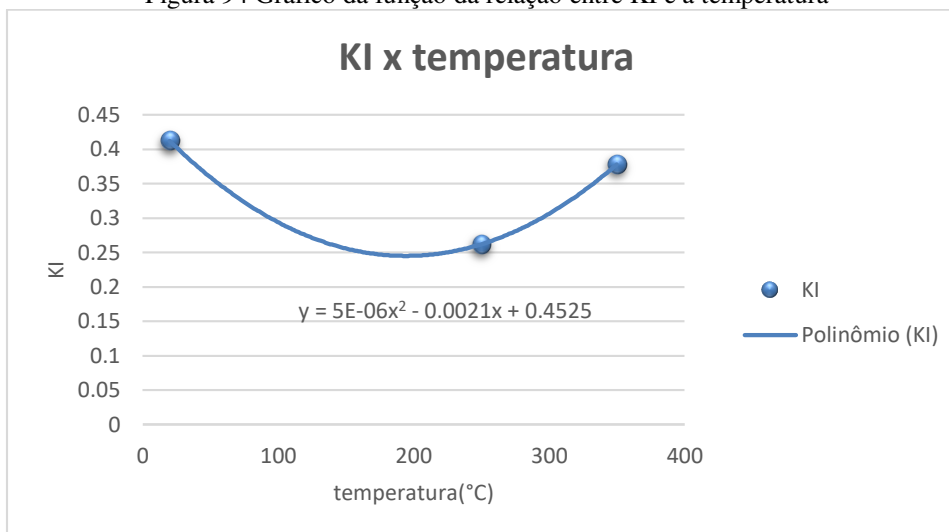


C

Fonte: Autor

A Figura 94 representa a relação entre o fator de intensidade e a temperatura obtidas pelo modelo numérico criado pelo autor, baseado nos resultados experimentais realizados pelos pesquisadores Truong *et al.* (2019). Observa-se que no estudo de Truong *et al.* (2019), o módulo de elasticidade das amostras apresentaram uma oscilação. Isso influencia diretamente no fator de intensidade de tensão, pois o parâmetro mais importante é o módulo de elasticidade do material nas equações para o cálculo do KI (integral J). A equação encontrada através de software excel foi um polinômio de 2°.

Figura 94 Gráfico da função da relação entre KI e a temperatura

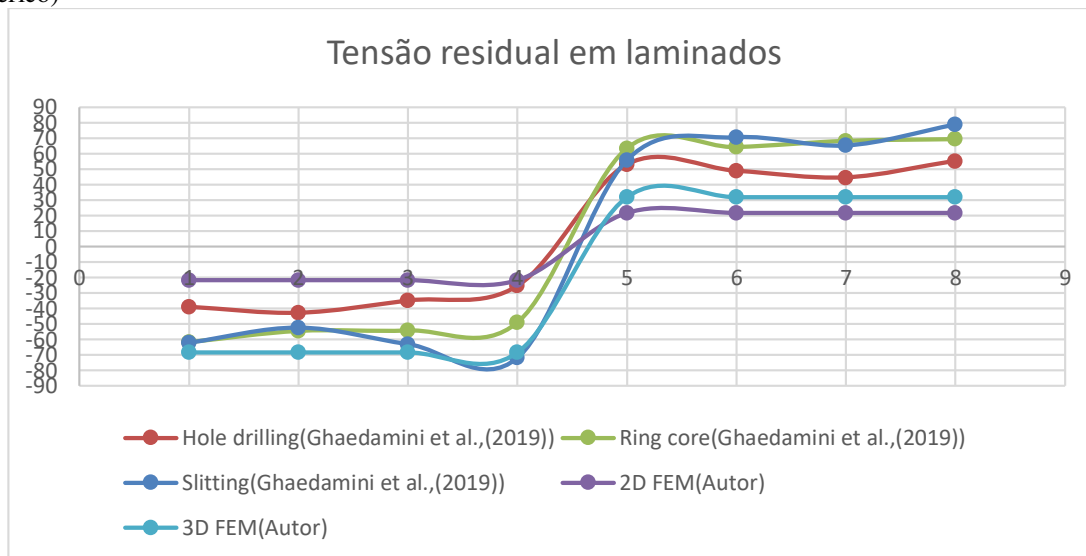


Fonte: Autor

7.6 Modelo termomecânico para laminado com fibras sintéticas

Os resultados nessa seção são referentes ao item [6.6](#). Conforme pode ser visto no gráfico(Figura 95), é possível observar a diferença nos valores obtidos de tensão residual em cada método e como eles se comparam com os modelos numéricos; os valores obtidos através dos métodos de elementos finitos 2D são mais baixos devido à questão de não considerar todos os parâmetros térmicos. Mesmo assim, esse método é o que está de acordo com a teoria clássica dos laminados, que apenas leva em consideração os coeficientes de expansão térmica das lâminas para o cálculo das tensões residuais e a variação de temperatura. O valor mais próximo de tensão residual no modelo numérico 2D foi observado na 4 lâmina quando comparado com os experimentos realizados por Ghaedamini *et al.* (2019). Em contrapartida, no Modelo 3D (modelo termomecânico) há um aumento da tensão residual em decorrência da utilização de mais parâmetros térmicos. Para efeito de estudo de laminados de concreto com fibras de carbono, será usado posteriormente o modelo 2D (*shell*). Vale ressaltar que a diferença também pode ocorrer, pois nem todos os parâmetros são do mesmo estudo, já que alguns valores foram adotados de outros estudos, como se trata do mesmo material laminado de epóxi e reforçado com fibras de vidro.

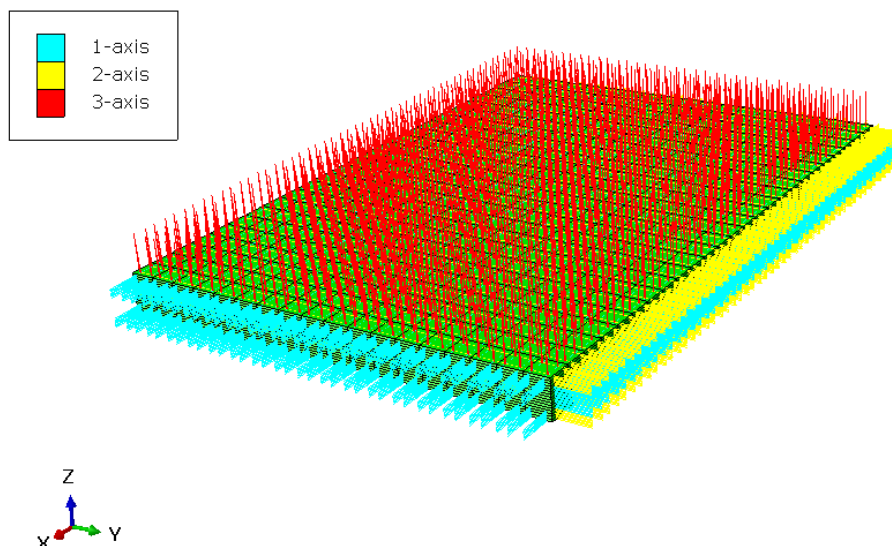
Figura 95 Comparação entre os métodos para determinar a tensão residual em laminados (experimental × numérico)



Fonte: Autor

Outro ponto a ser analisado é que todos os modelos seguem o mesmo comportamento. Nas primeiras camadas há compressão e nas camadas intermediárias há tração. Além disso, no experimento, percebe-se que nas primeiras camadas há maior tensão residual devido ao fluxo de calor mais acentuado nessas camadas do que nas camadas intermediárias. A Figura 96 representa a orientação das fibras no modelo numérico do tipo sólido criado no abaqus.

Figura 96 Orientação das fibras no modelo termomecânico acoplado de laminado de matriz polimérica reforçada com fibras de vidro

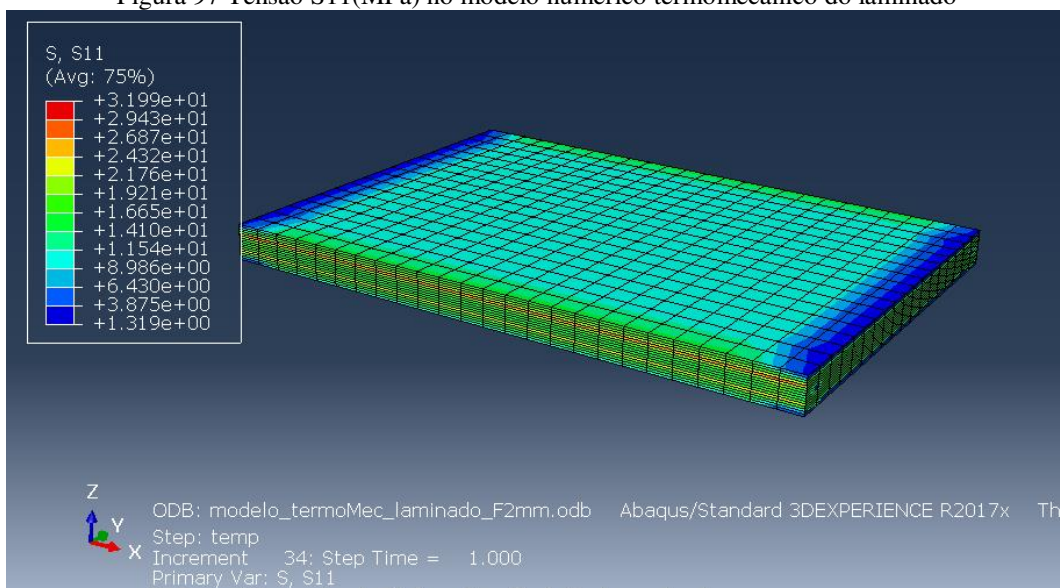


Fonte: Autor

A Figura 97 mostra a tensão S11 no modelo termomecânico acoplado do laminado com fibras sintéticas. Observa-se que ao longo da espessura do laminado há variação da tensão

residual. Verifica-se que apresenta regiões de tração em decorrência da mudança térmica.

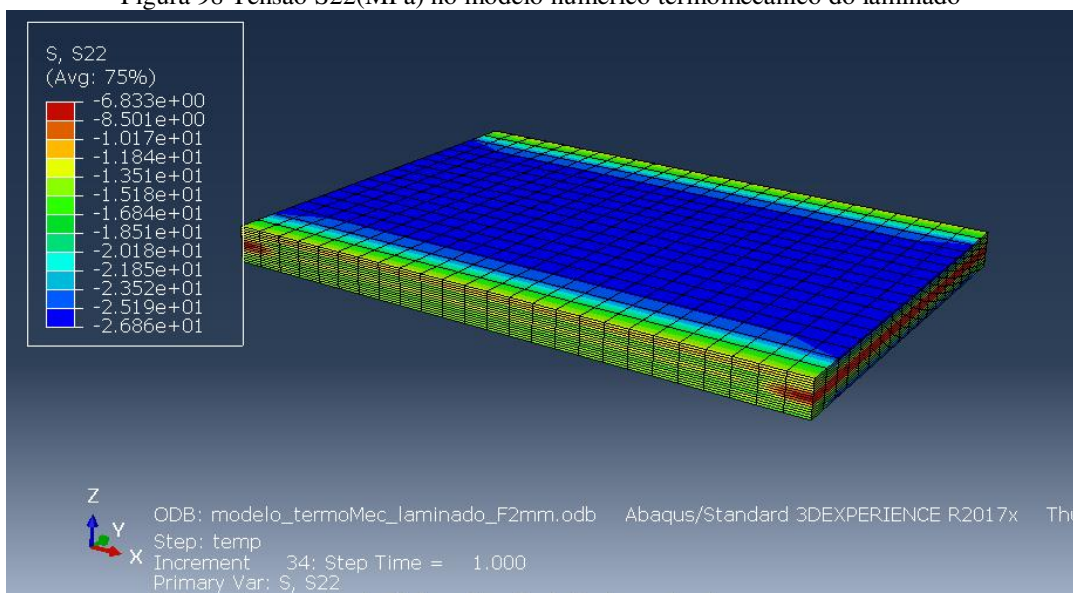
Figura 97 Tensão S11(MPa) no modelo numérico termomecânico do laminado



Fonte: Autor

A Figura 98 apresenta a tensão residual (S22) do modelo termomecânico do laminado. Nota-se que as lâminas apresentam compressão de lâminas em decorrência da mudança térmica.

Figura 98 Tensão S22(MPa) no modelo numérico termomecânico do laminado

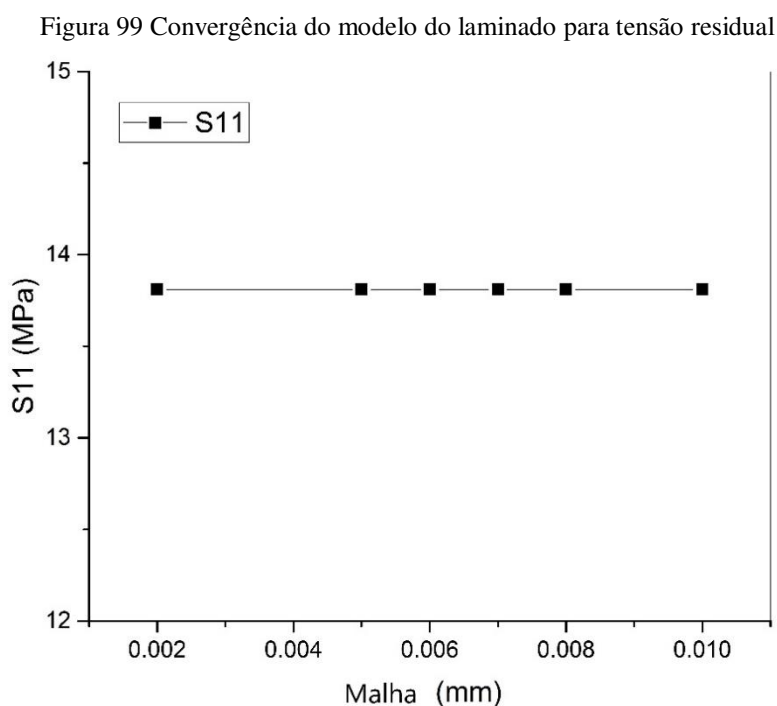


Fonte: Autor

7.6.1 Modelo para determinação da tensão residual de laminado de matriz cimentícia e fibra de carbono

7.6.1.1 Modelo para determinação da tensão residual de laminado

Com relação à análise de convergência para tensão residual do laminado, a Figura 99 mostra que à medida que o tamanho da malha diminui, há uma tendência de os valores de tensão convergirem (S11-stress). O laminado utilizado nesta análise foi de [0/90/90]s.

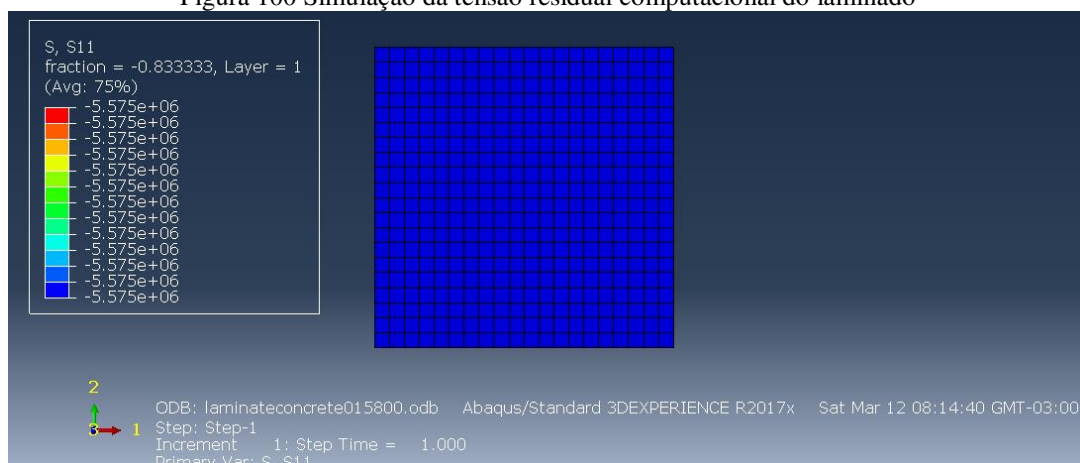


Fonte: Autor

Dessa forma, utilizou-se o tamanho de malha de 2 mm para simulação da tensão residual do laminado, pois os resultados se mantiveram constantes.

Com relação à simulação para determinação da tensão residual dos laminados, a Figura 100 mostra o resultado da simulação computacional realizada pelo ABAQUS. Todos os resultados são mostrados Tabela 17.

Figura 100 Simulação da tensão residual computacional do laminado



Fonte: Autor.

A Tabela 17 mostra os resultados obtidos tanto analítica quanto numericamente para diferentes orientações das fibras no laminado. As análises foram em três diferentes variações de temperatura: T1, T2 e T3. Os laminados com ângulos de $[0/90/90]_s$ apresentam os maiores valores de tensão residual obtidos analítica e numericamente foram iguais a $-85,30$ MPa em S_{xx} nas camadas a 0° ; quando submetidos à variação de temperatura T3 (ver Tabela 17). Já a tensão residual em S_{xx} – camada a 90° – os valores de tensão residual obtidos analítica e numericamente foram iguais a $42,6$ MPa. Em S_{yy} a tensão residual analítica e numérica foram iguais a $-82,90$ MPa em S_{xx} nas camadas a 0° . Com relação à tensão residual em S_{yy} – camada a 90° – os valores de tensão residual obtidos analítica e numericamente foram iguais a $-41,4$ MPa.

Em contrapartida, o laminado que apresentou menor tensão residual na variação de temperatura T3 foi o laminado $[0/15/15]_s$. Além disso, podemos observar que quanto menor a variação de temperatura, menor será o valor de tensão residual, sendo que mesmo mantendo uma baixa variação de temperatura, a modificação das angulações das camadas intermediárias influenciam diretamente na tensão residual do laminado.

Comparando a configuração de $[0/90/90]_s$ e $[0/15/15]_s$ na T3. Podemos observar uma redução percentual de 94% da tensão residual na primeira camada e uma redução de 94% nas camadas intermediárias para tensão tanto em S_{xx} e S_{yy} .

O entendimento desse efeito é importante para posterior aplicação desse material na construção civil.

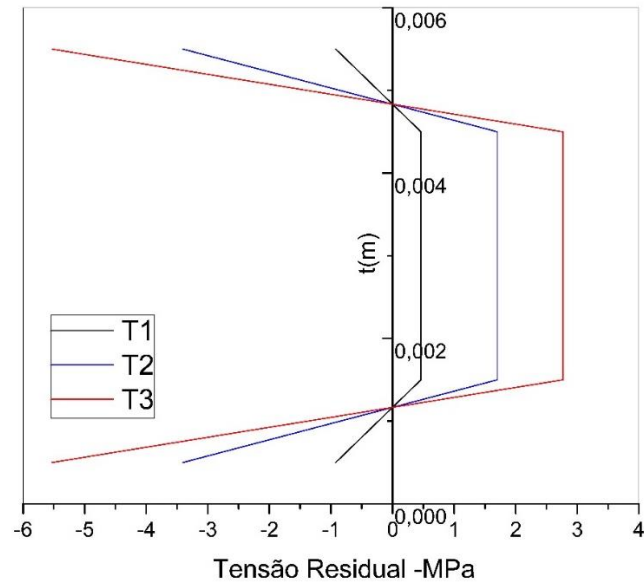
Tabela 17 Tensão residual em função da temperatura para diferentes configurações de laminados

Variação de temperatura	Ângulo(°)	Sxx(teor) Mpa	Sxx(num) Mpa	Syy(teor) Mpa	Syy(num) Mpa
T1	0	-14.2	-14.2	13.8	13.8
	90	-6.90	-6.91	7.11	7.11
	0	-7.03	-7.01	6.80	6.81
	45	3.51	3.51	-3.40	-3.41
	0	-0.922	-0.929	0.895	0.902
	15	0.461	0.465	-0.448	-0.451
T2	0	-52.5	-52.5	51.0	51.0
	90	-25.5	-25.5	26.2	26.2
	0	-26.0	-25.9	25.1	25.2
	45	13.0	12.9	-12.5	-12.6
	0	-3.40	-3.43	3.31	3.33
	15	1.70	1.72	-1.65	-1.67
T3	0	-85.3	-85.3	82.9	82.9
	90	42.6	42.6	-41.4	-41.4
	0	-42.17	-42.1	40.8	40.9
	45	21.08	21.04	-20.4	-20.4
	0	-5.53	-5.58	5.37	5.41
	15	2.77	2.79	-2.69	-2.71

Fonte: Autor.

A Figura 101 mostra o perfil de tensão residual do laminado $[0/15/15]_s$ quando este está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3. Podemos observar que na primeira e última camada (lâmina com orientação em 0°) da lâmina, um perfil linear de tensão, no caso uma contração em Sxx, nas subcamadas subsequentes, podemos verificar um perfil constante de tensão positiva em Sxx. Isso indica que a configuração do compósito influencia a tensão residual ao longo da espessura, apresentando em regiões de contração mais acentuada e regiões com tensão positiva provocada pela mudança de temperatura e que conforme aumenta essa variação, há aumento progressivo da tensão residual.

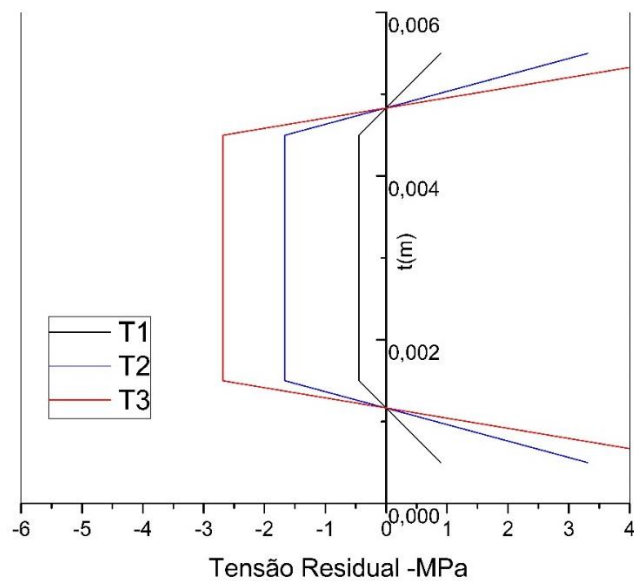
Figura 101 Tensão residual do laminado[0/15/15]s em S_{xx} em função da espessura $S_{xx}[0/15/15]s$



Fonte: Autor

Com relação à tensão em S_{yy} , a Figura 102 mostra o perfil de tensão residual do laminado [0/15/15]s quando este está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3. Podemos verificar que na primeira e última camada (lâmina com orientação em 0°) do laminado um perfil linear de tensão, no caso uma expansão, e nas camadas subcamadas subsequentes, podemos verificar um perfil constante de tensão negativa em S_{yy} . Ou seja, um perfil invertido ao S_{xx} , quanto maior a variação de temperatura, maior a contração nas camadas intermediárias.

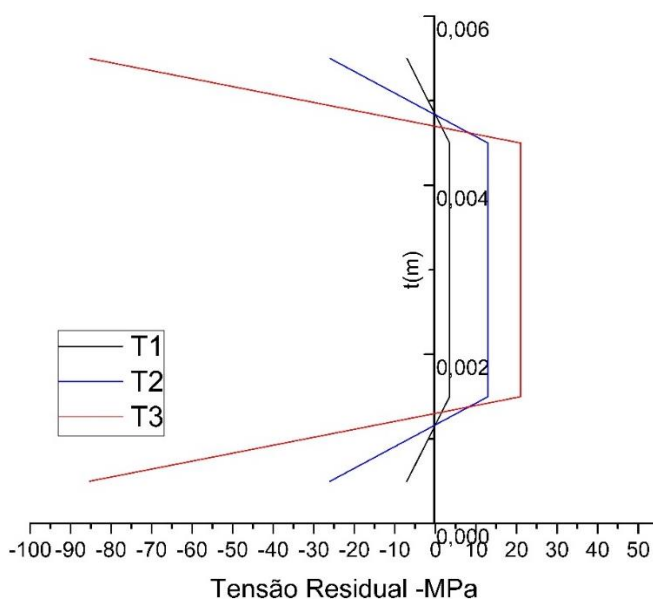
Figura 102 Tensão residual do laminado[0/15/15]s em S_{yy} em função da espessura $S_{yy}[0/15/15]s$



Fonte: Autor.

A Figura 103 mostra o perfil de tensão residual do laminado $[0/45/45]_s$ quando está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3. Ao analisar o gráfico, podemos notar que na primeira e última camada (lâmina com orientação em 0°) do laminado há uma contração em S_{xx} . Nas subcamadas subsequentes podemos verificar um perfil constante de tensão positiva em S_{xx} . Em relação à configuração $[0/15/15]_s$, houve um aumento da tensão em S_{xx} .

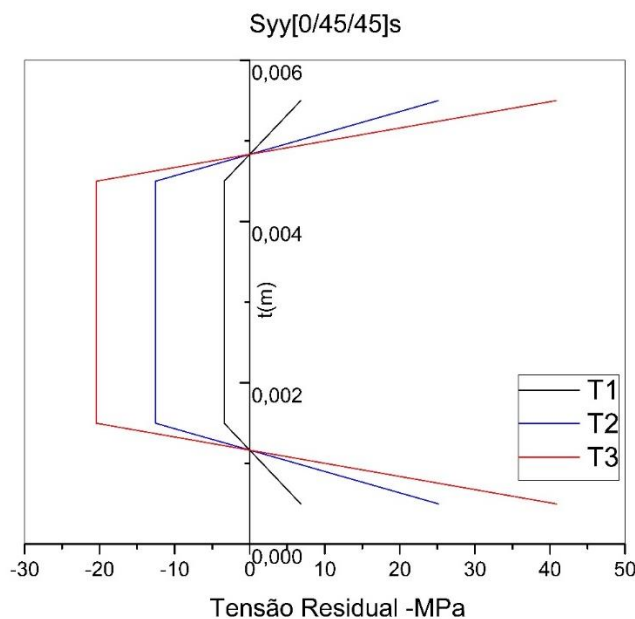
Figura 103 Tensão residual do laminado $[0/45/45]_s$ em S_{xx} em função da espessura



Fonte: Autor.

Com relação ao perfil de tensão residual em relação ao eixo y do laminado, pode-se verificar através da Figura 104 o laminado $[0/45/45]_s$ quando está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3, que na primeira e última camada (lamina com orientação em 0°) do laminado houve uma tensão de expansão em S_{yy} . Nas subcamadas subsequentes, podemos verificar um perfil constante de tensão negativa em S_{yy} . Em relação à configuração $[0/15/15]_s$, houve um aumento da tensão em S_{yy} , conforme o aumento da variação de temperatura.

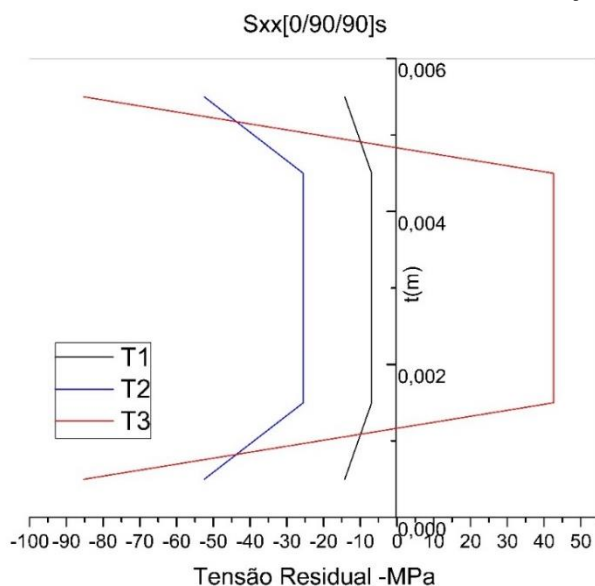
Figura 104 Tensão residual do laminado[0/45/45]_s em S_{yy} em função da espessura



Fonte: Autor.

A Figura 105 mostra o perfil de tensão residual do laminado [0/90/90]_s quando está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3. Ao analisar o gráfico, podemos notar que em T1 o comportamento foi intermediário em relação às variações T2 e T3. Na T3, foi a variação de temperatura que mais provocou tensão nesse laminado ao longo da espessura — camadas externas (lâmina com orientação em 0°), contração S_{xx} e nas camadas intermediárias (lâminas com orientação em 90°) tensão positiva apenas na T3. Na T1 e T2 as camadas intermediárias apresentaram contração.

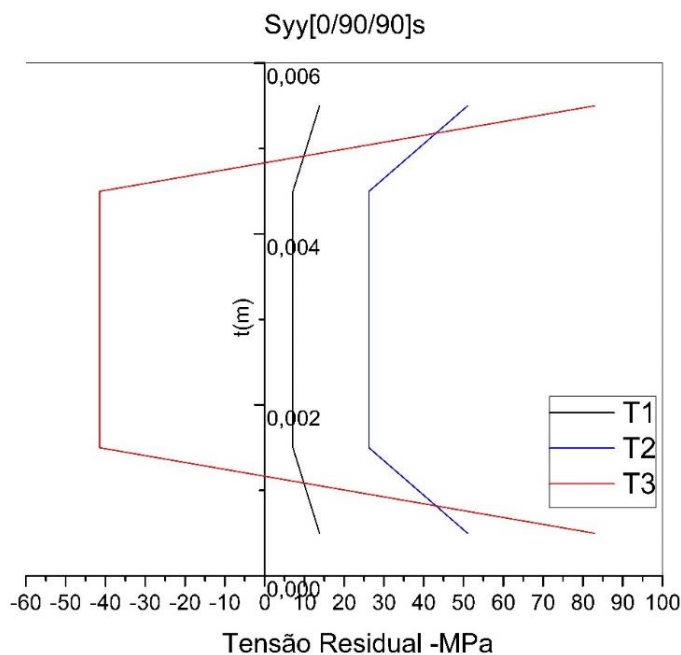
Figura 105 Tensão residual do laminado[0/90/90]_s em S_{xx} em função da espessura



Fonte: Autor

Com relação ao perfil de tensão residual em relação ao eixo y do laminado, a Figura 106 mostra o perfil de tensão residual do laminado [0/90/90]_s quando está sujeito às variações de temperatura T1, T2 e T3. Ao analisar o gráfico, pode-se observar que a tensão é positiva em T1 e T2 para as camadas intermediárias-lâminas à 90°, porém em T3, há uma contração considerável dessas camadas; em contrapartida, as camadas externas, lâminas à 0°, apresentam uma expansão nas três variações de temperatura, sendo que a maior tensão S_{yy} foi constatada na T3.

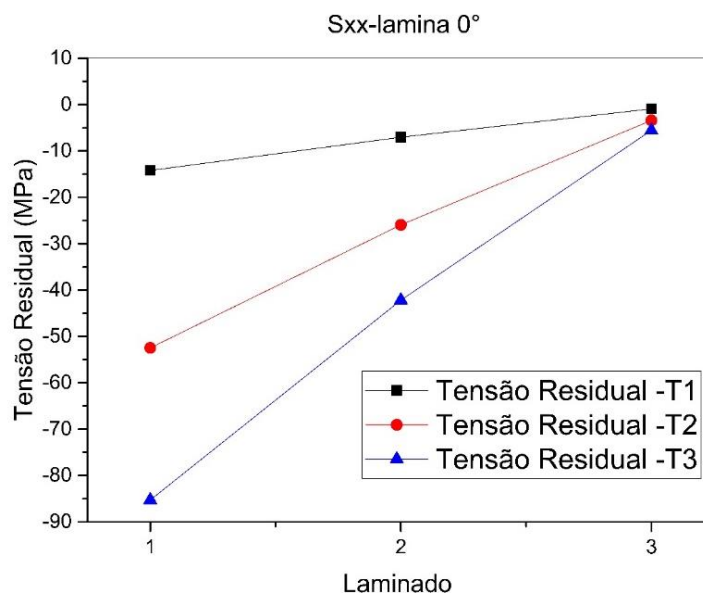
Figura 106 Tensão residual do laminado[0/90/90]_s em S_{yy} em função da espessura



Fonte: Autor

Com relação à tensão S_{xx} , podemos observar que há um valor de tensão residual mais elevado nas extremidades do que na região central, onde encontram-se as fibras alinhadas a 15°. Isso se deve ao fato das fibras alinhadas a 0° provocarem maior tensão residual do que as lâminas com as fibras na angulação de 15° (ver a Figura 107).

Figura 107 Tensão residual do laminado Sxx (camada 0°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]s), 2([0/45/45]s) e 3([0/15/15]s)

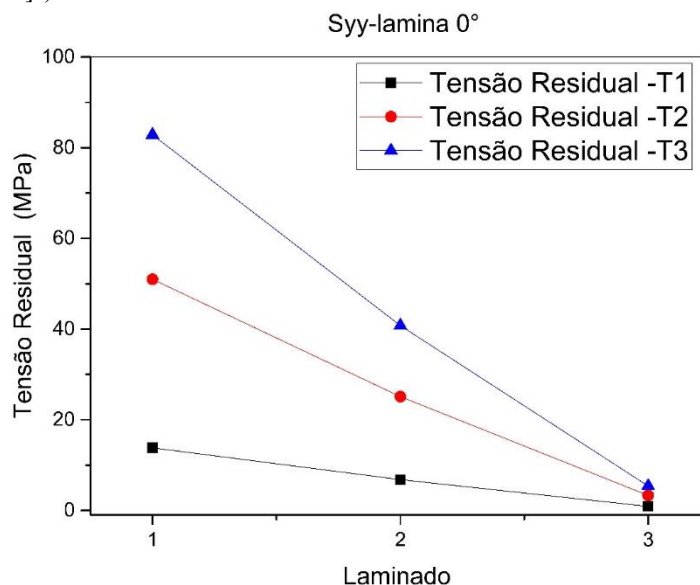


Fonte: Autor

Comparando as primeiras camadas dos diferentes laminados, podemos notar que a mudança de angulação das camadas centrais mudou consideravelmente a tensão residual das camadas externas conforme a mudança de temperatura. Na Figura 107, essa mudança foi praticamente linear crescente. A partir do gráfico, podemos observar que conforme a mudança da angulação das camadas intermediárias, há uma mudança significativa na tensão residual em Sxx das camadas externas que no caso apresenta a angulação em 0°. A tensão residual mais elevada foi observada quando a angulação das camadas intermediárias apresentaram angulação de 90°, tensão de residual de contração.

Para tensão residual em Syy (Figura 108), podemos observar maior tensão residual quando a angulação das camadas é 90°, além disso que verificasse que a mudança de temperatura tem um efeito mais significativo quando as lâminas intermediárias apresentam essa angulação.

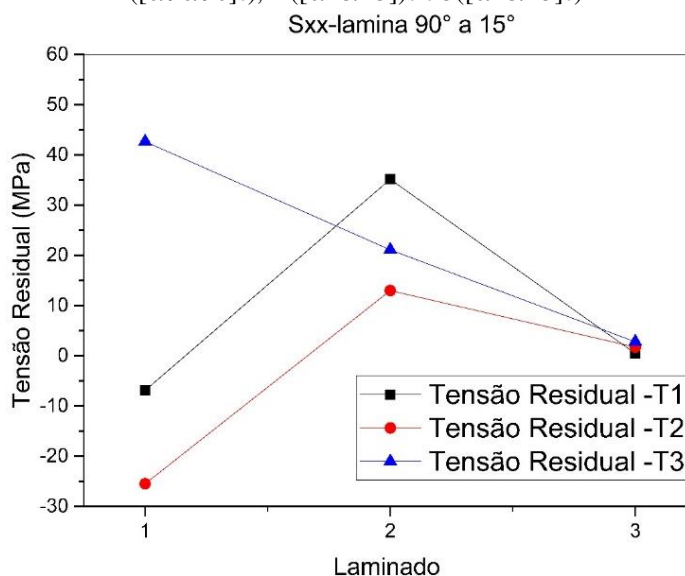
Figura 108 Tensão residual do laminado S_{yy} (camada 0°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]_s), 2 ([0/45/45]_s) e 3([0/15/15]_s)



Fonte: Autor.

Com relação às camadas intermediárias, podemos observar um comportamento totalmente diferente das lâminas quando submetidas a diferenças de temperaturas. Verifica-se que em baixas mudanças de temperatura não há uma variação considerável da tensão residual em S_{xx} com a variação da angulação dessas camadas, conforme pode ser observado na Figura 109. O comportamento é linear em uma variação de temperatura de 800°C - 20°C para as três variações de angulações das camadas intermediárias.

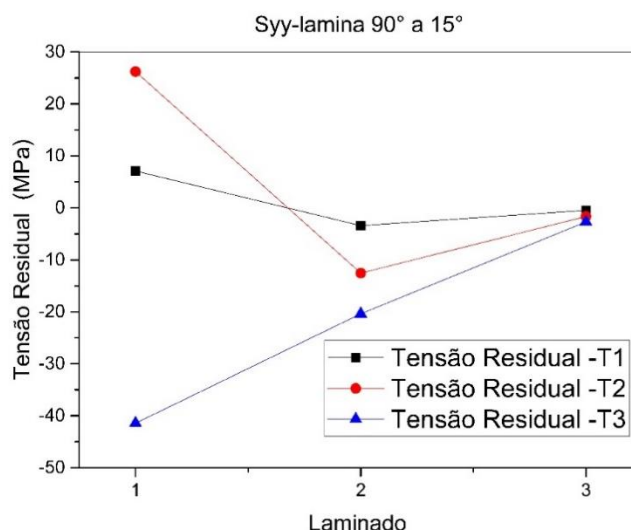
Figura 109 Tensão residual do laminado S_{xx} (camada 2 de 90° a 15°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1([0/90/90]_s), 2 ([0/45/45]_s) e 3([0/15/15]_s)



Fonte: Autor

Para a tensão residual em S_{yy} , podemos observar o comportamento oposto ao apresentado em S_{xx} . Para variação de temperatura de T1 (150°C-20°C), observamos baixa tensão residual para as três angulações, já para variação de temperatura de T2 (500°C-20°C), observamos uma variação considerável da tensão residual em S_{yy} , com uma contração na lâmina com angulação de 45°. Por fim, na variação de temperatura de T3 (800°C-20°C), praticamente o comportamento é linear, com uma tensão residual de contração com angulação de 90°. Pode-se verificar através Figura 110 um decréscimo linear com a mudança da orientação das camadas intermediárias que são 90°, 45° e 15°.

Figura 110 Tensão residual do laminado S_{yy} (camada 2 de 90° a 15°) em T1, T2 e T3 para os laminados 1 ([0/90/90]_s), 2 ([0/45/45]_s) e 3 ([0/15/15]_s)



Fonte: Autor

No estudo de Ngoc (2021), analisaram três níveis de temperatura. Foram 25°C (condição ambiente), 200°C e 400 °C. O presente estudo investigou o efeito de microfibras dispersas no comportamento de tração de espécimes de compósitos de matriz cimentícia reforçados com fibras de carbono não revestidos após exposição a altas temperaturas. Os principais parâmetros de teste incluem o tipo de microfibra, fração de volume de fibra e nível de alta temperatura. Conforme os resultados, a inclusão de microfibras de microaço e microfibras de aço e fibras metálicas amorfas melhoraram significativamente as características de tração do compósito não revestido em exposição ambiente e em alta temperatura.

Dinh *et al.* (2020) analisaram laminados com dois ângulos de inclinação de filamentos de fibra de 0°/90° e - 45°/45°. Os resultados dos testes mostraram que o reforço têxtil dentro da matriz de argamassa cimentícia afetou os modos de ruptura e o desempenho de cisalhamento dos corpos de prova em termos de fissuração e tensão de cisalhamento última, deformação de

fissura e tensão de cisalhamento residual nos estágios pré e pós-pico. Verificaram que com um ângulo de inclinação de 45° dos filamentos de fibra (SA- 45 series), dentro da matriz de argamassa, afetou o comportamento de cisalhamento de corpos de prova *carbon fiber textile-reinforced mortar* TRMa série SA-45, apresenta uma tensão de cisalhamento de fissuração média mais baixa e uma tensão de cisalhamento final média 27% maior do que a da série SA-90; no entanto, no estágio pós-pico, a capacidade de carga de tensão de cisalhamento residual da série SA-45 é ligeiramente inferior ao da série SA-90. Além disso, o deslocamento da trinca, incluindo a largura da trinca e o deslizamento da trinca do A série SA-45, também mostra uma tendência crescente em comparação com a série SA-90. Isso indica que a configuração do laminado influencia diretamente na tensão de cisalhamento e após o início da propagação da trinca.

Péron *et al.* (2017) pesquisaram sobre um modelo que permite estimar as tensões residuais durante o resfriamento. Baseia-se na teoria do laminado não linear, adaptada para sequências arbitrárias de *layup*. Dois métodos principais foram usados para prever as tensões induzidas pelo processo de compósitos termoplásticos: o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Teoria Clássica dos Laminados (CLT). O estudo mostrou que a sequência de camadas tem um papel importante na intensidade das tensões residuais, mais do que a fração volumétrica da fibra ou a taxa de resfriamento, cujos efeitos parecem ser mais desprezíveis. No entanto, é preciso ter cuidado ao analisar esses resultados. Este estudo se concentra em camadas equivalentes homogêneas. A intensidade e distribuição das tensões podem não ser as mesmas quando se considera a microestrutura fibra-matriz.

Watt *et al.* (2019) estudaram a tensão residual de laminados de compósitos de matriz de titânium (TMCs) com monofilamento de SiC (SM3156), usando o método (total etch removal method), TERM para medir as deformações residuais térmicas (e, portanto, as tensões) para as fibras 0° em titânio unidirecional e *cross-ply* compósitos matriciais (TMCs). Esses resultados foram então em comparação com as estimativas de deformação residual obtidas a partir de dados de testes mecânicos e análise de elementos finitos. Para os laminados de *cross-ply* ($[0/90]_{2s}$), a resistência térmica tensão residual nas fibras 0° foi prevista usando a análise FE, seja significativamente menor do que a média encontrada para todas as 0° fibras no laminado. No entanto, uma distribuição bimodal de deformações residuais foram encontradas, com as laminas 0° internas experimentando uma maior tensão de compressão no compósito fabricado do que as camadas 0° externas. Os resultados confirmam que a aproximação da regra das misturas pode ser utilizada, com algumas reservas no que diz respeito ao comportamento de baixa deformação.

8 CONCLUSÕES

Um dos problemas significativos dos materiais é a falha prematura dos elementos estruturais devido a fissuras. As fibras, de modo geral, desempenham um papel fundamental no aumento da resistência mecânica dos elementos de concreto; isso depende do tipo de fibra, fração volumétrica, orientação e forma. Nesse sentido, as fibras de carbono podem ser substitutas para as fibras de aço, no caso de fibras curtas, e outras formas de reforço ao concreto, como laminados. Assim, entender a falha deste material é extremamente importante. O SIF, como parâmetro essencial na mecânica da fratura-LEFM, pode ser obtido por meio de modelos computacionais.

A partir desta pesquisa, conclui-se que a técnica de inserção de trinca na modelagem no abaqus mostrou-se adequada ao problema analisado. O modelo numérico de dano do concreto usando XFEM e FEM para determinação do fator de intensidade de tensão estão de estreita concordância com os resultados experimentais da literatura; o fator de intensidade de tensão pode ser determinado usando FEM e XFEM, considerando-o material homogêneo e isotrópico. Pode-se determinar a taxa de liberação de energia no concreto usando XFEM, e relacionar a abertura da trinca com flecha no modelo XFEM do concreto.

Dos resultados obtidos para o compósito de laminados de concreto com fibra de carbono em diferentes orientações de fibra com entalhe, verifica-se que os compósitos com maior valor de tensão máxima, fator de intensidade de tensão -KI, e deformação, são aqueles com ângulos de $\pm 75^\circ$. As fibras de carbono podem aumentar a tenacidade à fratura do concreto e podem dificultar a propagação de trinca, dependendo da orientação das fibras em relação à trinca. A angulação entre as camadas é essencial para esse aumento de tensão. No caso, há um aumento linear com o aumento da angulação de fibras para o laminado analisado. O coeficiente de correlação de Pearson indicou uma forte correlação entre o KI e a orientação da fibra no laminado. Os resultados da técnica de modelagem por elementos finitos mostraram-se satisfatórios em comparação aos resultados teóricos. Em laminados de concreto com fibra de carbono, verifica-se que a variação do ângulo modifica seu comportamento mecânico e interfere diretamente no fator de intensidade de tensão. Os resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos e do método analítico estão em estreita concordância entre si.

Com relação à simulação com corpo de prova de geometria CCT, ela mostrou-se adequada para o uso do FEM e XFEM. Entretanto, com o método XFEM, há dificuldade em visualizar a tensão na ponta da trinca. Com relação aos valores obtidos, concluiu-se que a configuração com maior valor do fator de intensidade de tensão foi a dos laminados de 75° e

ângulo de trinca de 15° . Os modelos analíticos e numéricos mantiveram valores relativos, e o comportamento foi praticamente linear. A tensão máxima foi para o laminado com um ângulo da trinca de 15° .

Conclui-se ainda que em ambos os tipos de corpo de prova verificaram essa tendência na modificação do fator de intensidade de tensão e que os resultados obtidos a partir do FEM, XFEM e do método analítico estão de acordo.

Acerca da tensão residual, um dos problemas significativos dos materiais é a mudança de temperatura que pode ocasionar a falha do material. As fibras desempenham um papel fundamental no aumento da mudança da resistência mecânica e no comportamento térmico de elementos concretos, por apresentar boa resistência mecânica, e dependendo do tipo de fibra, até térmica. Assim, entender o comportamento do concreto com fibras de carbono em situações onde há variação de temperatura é extremamente importante.

A tensão residual, como parâmetro de análise, pode ser obtida por meio de modelos computacionais. O estudo analisou laminados de matriz cimentícia e fibras de carbono. Com relação à criação do modelo numérico de argamassa reforçada com fibras de carbono, conclui-se que está de estreita concordância com os resultados experimentais da literatura; O uso do XFEM condiz com o modelo experimental na análise não linear. Pode-se, portanto, determinar o fator de intensidade de tensão usando FEM e XFEM em modelo numérico desse material em análise linear. O ângulo de trinca influencia no fator de intensidade de tensão de maneira linear; a temperatura influencia diretamente no fator de intensidade de tensão; o fator de intensidade de tensão é mais alto na temperatura ambiente; a relação entre CMOD, temperatura e KI não foi linear; tensões residuais são mais expressivas na regiões externas.

Concernente aos modelos para determinação da tensão em laminados reforçados com fibras sintéticas, conclui-se que no modelo numérico de laminado reforçada com fibras sintéticas está de estreita concordância com os resultados experimentais da literatura; o modelo numérico do tipo shell está de acordo com a teoria dos laminados na determinação das tensões residuais; o modelo sólido termomecânico de laminados está em estreita concordância com os resultados experimentais da literatura. Além disso, a programação em python foi mais eficiente que o modelo computacional usando FEM.

Os seguintes laminados foram analisados $[0/15/15]_s$ e $[0/45/45]_s$ e $[0/90/90]_s$, onde mudou-se somente a angulação das lâminas intermediárias. Utilizaram-se modelos analíticos e numéricos para este estudo.

A partir dos resultados obtidos para o concreto com fibra de carbono em diferentes temperaturas, conclui-se que os compósitos com o maior valor máximo de tensão residual são

aqueles que apresentam na camada intermediária ângulos de 90° .

A partir deste estudo, conclui-se também que a tensão residual em laminados concreto/fibra de carbono pode ser obtida por meio de modelo apresentado tipo shell, e que o comportamento desses laminados é influenciado pelas variações de angulação de fibra e temperatura, ou seja, apenas a mudança de orientação da camada mais externa já é suficiente para provocar regiões de tração e compressão, que geram cisalhamento entre elas — pela análise do perfil de tensão ao longo da espessura. Os resultados obtidos mostraram que a tensão residual foi maior para o laminado [0/90/90]_s tanto para tensão em x como y é menor para o laminado [0/15/15]_s. As tensões residuais no laminado [0/45/45] apresentam valor intermediário em relação aos demais e menor variação de tensão residual para as três variações de temperatura.

A camada a 0° sofreu forte influência da temperatura com a mudança de orientação das camadas intermediárias, apresentando um maior valor de tensão residual na T3. As camadas de 90° a 15° (camadas intermediárias) apresentam baixa tensão residual na variação de temperatura T3.

Resultados da técnica de modelagem por elementos finitos mostraram-se satisfatórios em comparação com os resultados teóricos e experimentais tanto para determinação do KI como para tensão residual. Estes resultados podem fornecer uma base para novas investigações e aplicações práticas desses laminados na construção civil.

9. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Criar esse material experimentalmente. Para isso é necessário adequar a fração volumétrica para que tenha adesão interfacial. Além disso, é necessário estudo de adesão interfacial e modificação da matriz ou fibra para melhorar a adesão. Mapear todo o comportamento do material ao ser exposto ao calor. Analisar o fator de intensidade de tensão na zona de transição matriz/fibra. Usar outros métodos numéricos para análise da fratura desse tipo de material em um comportamento termomecânico. Criar laminados híbridos com fibras naturais.

REFERÊNCIAS

- ABDULRAHMAN, A. S.; KADIR, M. R. A. Behavior and flexural strength of fire damaged high strength reinforced rectangular concrete beams after strengthening with CFRP laminates. **Ain Shams Engineering Journal**, 2022.
- ABRAHAM, A.; VINCE, A. **Building Better Products with Finite Element Analysis**. 1. ed. Santa Fe: On Word Press, v. I, 1999.
- ADENIYI, A. G. *et al.* Multi-scale finite element analysis of effective elastic property of sisal fiber-reinforced polystyrene composites. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, 2019.
- AHMET, K. B. *et al.* Mechanical properties and fracture behavior of basalt and glass fiber reinforced concrete: An experimental study. **Construction and Building Materials**, v. 15, p. 218-224, 2015.
- AKLILU, G.; ADALI, S.; BRIGHT, G. Tensile behaviour of hybrid and non-hybrid polymer composite specimens at elevated temperatures. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, p. 732-743, 2020.
- ALIREZA, S. *et al.* Influence of mix design variables on engineering properties of carbon fiber-modified electrically conductive concrete. **Construction and Building Materials**, October 2017. 168-181.
- ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics Fundamentals and Applications**. 4. ed. New York: CRC Press, v. I, 2017.
- ASADI, I. *et al.* Thermal properties of cement mortar with different mix proportions. **Mater. Construcc**, p. 339, 2020.
- BALÇIÖĞLU, H. E.; S. A. Ç. Comparison of machine learning methods and finite element analysis on the fracture behavior of polymer composites. **Archive of Applied Mechanics**, p. 1-18, 2020.
- BANGARU, A. K.; M. L. P. & S. B. F. Design of lâmina orientation for biaxially loaded off-axis tunnelling cracks. *In*: **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, 2020.
- BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. 3. ed. Florida: Boca Raton, 2017.
- BARD, S. *et al.* Influence of fiber volume content on thermal conductivity in transverse and fiber direction of carbon fiber-reinforced epoxy laminates. **Materials**, p. 1084, 2019.
- BAUER, E.; VASCONCELOS, P. H.; GRANATO, J. E. **Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais**. 3. ed. São Paulo: IBRACON, v. I, 2007.
- BAZANT, Z. P. Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal. **Journal of Engineering Mechanics**, n. 4, p. 518–535, 1984.
- BELLINI, C. E. A. Numerical model development to predict the process-induced residual

stresses in fibre metal laminates. **Forces in Mechanics**, p. 100017, 2021.

BENGI, A.; HWAI, C. Material characteristics of high performance lightweight concrete reinforced with PVA. **Construction and Building Materials**, p. 635-645, 2008.

BERNARDI, P. *et al.* Fracture toughness of fibre-reinforced concrete determined by means of numerical analysis. **Procedia Structural Integrity**, Madeira, p. 848-855, 2017.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 387-404, 1981.

BOUIADJRA, B. B.; BELHOUARI, M.; SERIER, B. Computation of the stress intensity factors for repaired cracks with bonded composite patch in mode I and mixed mode. **Composite Structures**, p. 401-406, 2002.

BRANSTON, J. *et al.* Mechanical behaviour of basalt fibre reinforced concrete. **Construction and Building Materials**, p. 878-886, 2016.

BROEK, D. Elementary engineering fracture mechanics. **Springer Science & Business Media**, 1982.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. 1. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

CAKIROGLU, C.; BEKDAŞ, G.; GEEM, Z. W. Harmony Search Optimisation of Dispersed Laminated Composite Plates. **Materials**, p. 2862, 2020.

CALLISTE, R. J. W. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Livros Tecnicos e ciencitificos, 2008.

CARPINTERI, A. *et al.* Mode I fracture toughness of fibre reinforced concrete. **Theor Appl Fract Mec**, October 2017. 66-75.

CARPINTERI, A. *et al.* Mode I fracture toughness of fibre reinforced concrete. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, p. 66–75, 2017.

COMPOSITESWORLD. Carbon fiber-reinforced concrete accelerates in Germany. CompositesWorld, 14 mar. 2024. Disponível em: <https://www.compositesworld.com/>. Acesso em: 14 mar. 2024.

CHARI, K. B. Investigation on Mode–I Fracture Parameters Using Steel Fibers in High Strength Concrete. **Journal of Scientific Engineering and Research (IJSER)**, p. 2347-3878, 2014.

CHAUHAN, D. R.; TEWANI, H. R.; KALYANA RAMA, J. S. Application of Principles of Linear Elastic Fracture Mechanics for Concrete Structures: A Numerical Study. **Applied Mechanics and Materials**, p. 282-288, 2018.

CHEN, F. *et al.* Thermally conductive glass fiber reinforced epoxy composites with intrinsic self-healing capability. **Advanced Composites and Hybrid Materials**, 2021.

CHITTIMENU, H. *et al.* Fracture Toughness of the Natural Fiber-Reinforced Composites: A Review. **Mechanical and Dynamic Properties of Biocomposites**, p. 293-304, 2021.

- CURIEL-SOSA, J. *et al.* Computational techniques for simulation of damage and failure in composite materials. **Structural Integrity and Durability of Advanced Composites**, 2015.
- DAS, S. *et al.* Simulating the fracture of notched mortar beams through extended finite-element method and peridynamics. **Journal of Engineering Mechanics**, 2019.
- DEVE, H. E.; MALONEY, M. J. On the toughening of intermetallics with ductile fibers – role of interfaces. **Acta Metallurgica et Materialia**, 1991.
- DINH, N. H.; PARK, S.-H.; CHOI, K.-K. Effect of dispersed micro-fibers on tensile behavior of uncoated carbon textile-reinforced cementitious mortar after high-temperature exposure. **Cement and Concrete Composites**, p. 103949, 2021.
- DINH, N. H.; VAN TRAN, H.; CHOI, K.-K. Direct shear behavior of cementitious mortar reinforced by carbon fiber textile, 118760.
- DONG, C. Flexural properties of symmetric carbon and glass fibre reinforced hybrid composite laminates. **Composites Part C: Open Access**, 100047.
- DONG, C. *et al.* Evaluation of thermal expansion coefficient of carbon fiber reinforced composites using electronic speckle interferometry. **Optics express**, 531-543.
- EKATERINA, K.; VLADIMIR, R. Strengthening of Concrete Beams with the Use of Carbon Fiber. **Adv Intel Syst Comp**, .
- EL-HAJJAR, R.; HAJ-ALI, R. Mode-I fracture toughness testing of thick section FRP composites using the ESE (T) specimen. **Eng fract mech.**, 631-643.
- EL-NEMR, A. M.; ASHOUR, O.; HEKAL, G. M. Finite element modeling of confined concrete piles with FRP tubes in sandy soil under static loading. **In Insights and Innovations in Structural Engineering**, 2122-2127.
- ESMAEILI, J. *et al.* Experimental and analytical investigation on strengthening of heat damaged concrete by textile reinforced concrete (TRC). **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, 1468-1483.
- FARON, A.; ROMBACH, G. A. Simulation of crack growth in reinforced concrete beams using extended finite element method. **Engineering Failure Analysis**, 104698.
- FASERVERBUNDWERKSTO, R. Handbuch Faserverbundwerksto. **R&G**, 2021. Disponível em: <<https://www.r-g.de/>>. Acesso em: 19 jan 2021.
- FEDULOV, B. N.; BONDARCHUK, D. A.; FEDORENKO, A. N. E. A. Residual stresses near the free edge of composite materials. **Acta Mech**, 417–435.
- FINNIE, I.; CHENG, W.; MCCORKINDALE, K. J. Delayed crack propagation in a steel pressure vessel due to thermal stresses. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, 15 – 31.
- FLEMING, M. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. **Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1483–1504.
- FORUM, W. E. Carbon composites one of top 10 emerging technologies. **Reinforced Plastics**, v. LVIII, n. 3, p. 8, 2014. ISSN 0034-3617.

FREUDENBERG, C. Textile Werkstoffe für den Leichtbau. **Textile Faserstoffe**, Berlin, 39-109.

GAWIL, B. I. Finite Element Modeling Of Frp Strengthened Concrete Beams And Columns At Different Temperatures. **Wayne State University** p. 1992016.

GBEKOU, F. K. *et al.* Mechanical and thermal properties of cement mortar composites incorporating micronized miscanthus fibers. **of materials research and technology**, 2023.

GEBRU, E. Effect of Fiber Orientation Angle on Stress Intensity Factor of Composite Laminated Crack **International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology**, 2018.

GEBRU, E.; JAIN, K. Effect of Fiber Orientation Angle on Stress Intensity Factor of Composite Laminated Crack Plate. **Int J Appl Sci Eng Tech**, p. 4700-4706, 2018.

GHAEDAMINI, R.; GHASSEMI, A.; ATRIAN, A. A comparative experimental study for determination of residual stress in laminated composites using ring core, incremental hole drilling, and slitting methods. **Materials Research Express**, p. 025205, 2018.

GHASEMI, A. R.; MOHAMMADI-FESHARAKI, M. Distribution of residual stresses in polymer reinforced carbon nanotubes and laminated carbon fibers. **Mechanics of Advanced Composite Structures**, p. 9-18, 2017.

GIBSON, R. F. **Principles of Composite Material Mechanics**. 3. ed. [S.l.]: CRC press, 2016.

GUO, Y. E. A. Finite element analysis of the thermal residual stress distribution in the interphase of unidirectional fiber-reinforced resin matrix composites. **Composite Interfaces**, p. 823-838, 2018.

HARRIS, B. Residual strains. **Engineering Composite Materials**, p. 79 – 83, 1999.

HENSHELL, R. D.; SHAW, K. G. Crack tip finite elements are unnecessary. **International journal for numerical methods in engineering**, p. 495-507, 1975.

HEYANG WU, X. L. A. Z. A review of mechanical properties of fibre reinforced concrete at elevated. **Cement and Concrete Research**, p. 106-117, 2020.

HOMSI, L.; NOELS, L. A discontinuous Galerkin method for non-linear electro-thermo-mechanical problems: application to shape memory composite materials. **Meccanica**, 2017.

HUANG, Y. *et al.* Characterization of mortar fracture based on three point bending test and XFEM. **International Journal of Pavement Research and Technology**, p. 339-344, 2018.

HUTCHINSON, J. W. Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics. **ASME. J. Appl. Mech**, p. 1042–1051, 1983.

IRWIN, G. R. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. **Nav Res lab**, p. 289–305, 1953.

ISAIA, G. C. **Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais**. 3. ed. São Paulo: IBRACON, v. I, 2017.

JAFARPOUR, A.; FARAHANI, M. S.; HAGHIGHI-YAZDI, M. Numerical investigation of

oriented CNFs effects on thermo-mechanical properties and curing residual stresses field of polymeric nanocomposites. **Mechanics of Materials**, p. 103176, 2019.

JAIN, L. K.; MAI, Y. W. On residual stress induced distortions during fabrication of composite shells. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, 1996.

JEAN, C. M. *et al.* Temperature, pore pressure and mass variation of concrete subjected to high temperature — Experimental and numerical discussion on spalling risk. **Cement and Concrete Research**, p. 477-487, 2010.

JIANG, G. U. O. E. A. Recent progress of residual stress measurement methods: A review. **Chinese Journal of Aeronautics**, p. 4-78, 2021.

JONES, F. R. Durability of reinforced plastics in liquid environments. **Reinforced Plastics Durability**, p. 9 – 96, 1999.

KAI, S. *et al.* Mineral-impregnated carbon fibre reinforcement for high temperature resistance of thin-walled concrete structures. **Cement and Concrete Composites**, p. 68-77, 2019.

KAW, A. K. **Mechanics of composite materials**. 2^a. ed. Boca Raton: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2006. 473 p.

KHIR ALLAH, N.; EL-MAADDAWY, T.; EL-HASSAN, H. Geopolymer- and Cement-Based Fabric-Reinforced Matrix Composites for Shear Strengthening of Concrete Deep Beams. **Buiding**, p. 448, 2022.

KHITAB, A. *et al.* Fracture toughness and failure mechanism of high performance concrete incorporating carbon nanotubes. **Frattura ed Integrità Strutturale**, p. 238-248, 2017.

KHOEI, A. R. **Extended finite element method: theory and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.

KIM, B.-J. *et al.* Preparation of carbon fibers with excellent mechanical properties from isotropic pitches. **Carbon**, p. 747-755, 2014.

KIM, J. K.; MAI, Y. W. Engineered Interfaces in Fiber Reinforced. **Composites**, 1998.

KIMM, M.; DAVIDE, P.; THOMAS, G. Investigation of surface modification and volume content of glass and carbon fibres from fibre reinforced polymer waste for reinforcing concrete. **journal of hazardous materials**, p. 121797, 2020.

KIZILKANAT, A. B. Experimental evaluation of mechanical properties and fracture behavior of carbon fiber reinforced high strength concrete. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, p. 289-296, 2016.

KIRÁLY, Tamás; KARÁCSONYI, Zsolt; POLGÁR, Rudolf. Macroscopic material degradation model of Norway spruce clear wood for XFEM. **Results in Materials**, v. 20, p. 100488, 2023.

KRISHNA, S. R. E. A. Simulation and analysis of residual stresses in a laminated graphite/epoxy composite plate using HyperMesh. **In: Recent Advances in Material Sciences. Springer, Singapore**, p. 365-374, 2019.

KRIZ, R. sv.rkriz.net. **Laboratory for Scientific Visual Analysis**, 2021. Disponivel em: <http://sv.rkriz.net/classes/MSE2094_NoteBook/97ClassProj/num/widas/history.html>.

Acesso em: 28 April 2021.

KUNSTSTO, A. Handbuch Faserverbundkunststo. **Springer Fachmedien Wiesbaden**, 2014.

KUNSTSTO, V.-F. **Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund - Berechnungen**. [S.l.]: VDI, v. III, 2006. 158 p.

KURNIAWAN, P.; KASYANTO, H.; MAULUDIN, L. M. Numerical modeling of low strength reinforced concrete column strengthened with CFRP jacketing. **Journal of Physics**, p. 19-20, 2021.

LAMPROS, K.; DIONYSIOS., B. Flexural strengthening of two-way RC slabs with textile-reinforced mortar: experimental investigation and design equations. **J Compos Constr**, p. 04016065, 2017.

LATEEF, H. *et al.* Study on the Shear Failure of Reinforced Concrete Beams Using Extended Finite Element Method (XFEM). **Basrah Journal for Engineering Sciences**, 2021.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos Estruturais**. 1. ed. [S.l.]: Bucher, 2006.

LI, J. B. *et al.* A Nonlinear Crack Model for Concrete Structure Based on an Extended Scaled Boundary Finite Element Method. **Applied Sciences**, p. 1067, 2018.

LI, M. C. *et al.* A plane- strain finite element model for process- induced residual stresses in a graphite/PEEK composite. **Composite Materials**, p. 212 – 43, 1997.

LIN, X. Numerical simulation of blast responses of ultra-high performance fibre. **Construction and Building Materials**, p. 371-382, 2018.

LIU, B. *et al.* The mechanical properties and microstructure of carbon fibers reinforced coral concrete. **Construction and Building Materials**, p. 118771, 2020.

LIU, H. Y. *et al.* On steady- state fi bre pull- out Part II: Computer simulation. **Composite Science and Technology**, p. 2191 – 9, 1999.

LUBLOY, E. How does concrete strength affect the fire resistance?. **Journal of structural fire engineering**, 2020.

LUI, X.; TAO, W.; YANG, L. Stress-strain relationship for plain and fibre-reinforced lightweight aggregate concrete. **construction and building materials**, 256-272.

MAŁEK, M. Propriedades mecânicas e materiais de argamassa reforçada com fibra de vidro: um estudo experimental. **Materials**, 698.

MARAWAN, S. *et al.* Abdelsalam A, B., Amin, M., Improving the brittle behavior of high strength concrete using banana and palm leaf sheath fibers. **Mech Adv Mater Struct**, june 1-10.

MARQUES, A. S. *et al.* Study of aggregate size effect on fracture toughness of petreous macrocomposites (concrete). **Materials Science Forum**, 1342-1348.

MARTA, K.-K.; JULITA, K. Fracture toughness of concrete with basalt fiber. **MATEC Web of Conferences**, Bialystok, 15-351.

MESSORI, M. E. A. Effect of high temperature exposure on epoxy-coated glass textile

reinforced mortar (GTRM) composites. **Construction and Building Materials**, 765-774.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. Concreto: microestrutura, propriedades e materiais, Ibracon, S. 2008.

MIHU, G. *et al.* Specific heat and thermal expansion coefficient of hybrid epoxy composites. **Mater. Plast**, 2020.

MIN, C. *et al.* Mechanical and smart properties of carbon fiber and graphite conductive concrete for internal damage monitoring of structure. **Construction and Building Materials**, 1 July 2017. 320-327.

MINUS, M. L.; KUMAR, S. The processing, properties, and structure of carbon fibers. **JOM**, 52-58.

MOES, N. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for**, 131–150.

MOHAMMADI, S. **Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures**. 1. ed. [S.l.]: Published by Blackwell, 2008.

MUGUME, R.; BANGI, T. H. Pore pressure development in hybrid fibre-reinforced high strength concrete at elevated temperatures. **Cement and Concrete Research**, 1150-1156.

MYERS, D. **Method for Measurement of Residual Stress and Coefficient of Thermal Expansion of Laminated Composites**. [S.l.]: University of Florida, 2004.

NAHUM, L.; PELED, A.; GAL, E. The flexural performance of structural concrete beams reinforced with carbon textile fabrics. **Composite Structures**, 111917.

NAKAMURA; SURESH, S. Effects of thermal residual stresses and fiber packing on deformation of metal- matrix composites. **Acta Metallurgica et Materialia**, 1993.

NATH, R. B.; FENNER, D. N.; GALIOTIS, C. The progressional approach to interfacial failure in carbon reinforced composites: Elasto- plastic finite element modeling of. **Composites: Part A**, 929 – 43.

NETO, F. L.; PARDINI, L. C. **Compósitos Estruturais**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

NEVILLE, A. M. **Concrete technology**. 2^a. ed. [S.l.]: Pearson, v. I, 2010.

NEVILLE, Adam M. **Propriedades do Concreto**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. 744 p.

NIKBIN, I. M. *et al.* Fracture parameters assessment of lightweight concrete containing waste polyethylene terephthalate by means of SEM and BEM methods. **Theor App Fract Mech**, 102518.

PEREZ, N. **Fracture Mechanics**. 2^a. ed. Mayaguez: Springer International Publishing, v. II, 2017.

PÉRON, M. E. A. Thermo-mechanical characterization of a thermoplastic composite and prediction of the residual stresses and lâmina curvature during cooling. **n: AIP Conference Proceedings**. AIP Publishing LLC, 2017. 030015.

- PÉRON, M. E. A. Thermo-mechanical characterization of a thermoplastic composite and prediction of the residual stresses and lâmina curvature during cooling. **In: AIP Conference Proceedings**. AIP Publishing LLC, 2017. 030015.
- PRADERE, C.; SAUDER, C. Transverse and longitudinal coefficient of thermal expansion of carbon fibers at high temperatures (300–2500 K). **Carbon**, 2008. 1874-1884.
- PRASHANTH, M.. G. P. S.. M. T. S.. B. N. R.. &. E. A. Understanding the impact of fiber orientation on mechanical, interlaminar shear strength, and fracture properties of jute–banana hybrid composite laminates. *Polymer Composites*. **Polymer Composites**, 2021. 5475-5489.
- PRIME, M. B. Measuring residual stress and the resulting stress intensity factor in compact tension specimens. **Materials and Structures**, 1999.
- PRIME, M. B. Residual stress measurement by successive extension of a slot: the crack compliance method. **Applied Mechanics Reviews**, 1999b.
- RAEISI, Roya; REZAIE, Freydoon; PERMANOON, Ali. Meso-scale modeling of concrete fracture by considering the aggregates and voids effect. **EFFLATOUNIA-Multidisciplinary Journal**, v. 5, n. 2, 2021.
- RAJAGOPAL, S.; GUPTA, N. Meshfree modelling of fracture—a comparative study of different methods. **Meccanica**, 2011. 1145-1158.
- RAJU, I. S.; NEWMAN, J. C. Stress- intensity factors for a wide range of semi- elliptical surface cracks in fi nite- thickness plates. **Engineering Fracture Mechanics**, 1979. 817 – 29.
- RAMESH, A. et al. Experimental investigation on the mechanical properties of flax, E-glass and carbon fabric reinforced hybrid epoxy resin composites. **AIP Publishing**, 2019.
- RAMESH, M. et al. Effect of hybridization on properties of hemp-carbon fibre-reinforced hybrid polymer composites using experimental and finite element analysis. **World Journal of Engineering**, 2019. 248-259.
- RAMESH, M.; NIJANTHAN, S. Mechanical property analysis of kenaf–glass fibre reinforced polymer composites using finite element analysis. **Bulletin of Materials Science**, 2016. 147-157.
- RAMESH, M.; SUDHARSAN, P. Experimental investigation of mechanical and morphological properties of flax-glass fiber reinforced hybrid composite using finite element analysis, Silicon. **Silicon**, 2018. 747-757.
- RAZMI, A.; MIRSAYAR, M. M. On the mixed mode I/II fracture properties of jute fiber-reinforced concrete. **Construction and Building Materials**, 1 September 2017. 512-520.
- REID, R.; PASKARAMOORTHY, R. A novel method to measure residual stresses in unidirectional GFRP. **Composite Structures**, 2009. 388 – 93.
- REINER, J.. V. R.. Z. N. Machine learning assisted characterisation and simulation of compressive damage in composite laminates. **Composite Structures**, 2021.
- REIS, J. M. L.; FERREIRA, A. J. M. Assessment of fracture properties of epoxy polymer concrete reinforced with short carbon and glass fibers. **Constr Build Mater**, September 2004. 523-528.

RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations. **J. Appl. Mech**, 1 June 1968. 379-386.

RÍOS, J. D. et al. Analysis of the tensile fracture properties of ultra-high-strength fiber-reinforced concrete with different types of steel fibers by X-ray tomography. **Materials & Design**, 5 March 2019. 107582.

SAAD, M.. A. I. S.. A. A. B.. & A. M. Improving the brittle behavior of high strength concrete using banana and palm leaf sheath fibers. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, 2022.

SAFARABADI, M.; SHOKRIEH, M. M. Understanding residual stresses in polymer matrix composites. In: **Residual stresses in composite materials**. Woodhead Publishing, 2014. 197-232.

SAFIUDDIN, M.; YAKHLAF, M.; SOUDK, K. A. Key mechanical properties and microstructure of carbon fibre reinforced self-consolidating concrete. **Construction and Building Materials**, 477-488.

SÁNCHEZ CRUZ, M. L.; CARRILLO, J.; ALMEIDA, S. F. Effect of thermal residual stresses on buckling and post-buckling properties of laminated composites perimetally reinforced. **Latin American Journal of Solids and Structures**, p. 435-455, 2016.

SANGI, M. V. A.. G.; DEHESTANI, M. Experimental verification and simulation of fracture behavior of CFRP reinforced self-consolidating concrete beams with initial notch. **SN Applied Sciences** volume, 2020.

SANTANA, E. P. D. **Análise do crescimento à fadiga, interação e coalescência de múltiplas trincas com o método dos elementos de contorno dual**. Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

SCHRANZINGER, A. **Modeling of Long-Fiber-Reinforced**. Master Thesis (Master of Science)-Wayne State University. Detroit, 2014.

SCHURMANN, H. Konstruieren mit Faser-Kunststo. In: HEIDELBERG **VDI-Buch**. 2. ed. Berlin: Springer, v. XXV, p. 21-81.

SEIF, M. A.; KHASHABA, U. A.; ROJAS- OVIEDO, R. Residual stress measurements in CFRE and GFRE composite missile shells. **Composite Structures**, p. 261 – 9.

SEIF, M. A.; SHORT, S. R. Determination of residual tresses in thin- walled composite cylinders. **Experimental Techniques**, p. 43 – 6.

SELEEM, S. E. A.; GHADA, M. A. G. Numerical Analysis of Mode I Fracture. **MANSOURA ENGINEERING JOURNAL**, .

SHI, F. Post-cracking behaviour of basalt and macro polypropylene hybrid fibre reinforced concrete with different compressive strengths. **Construction and Building Materials**, 1020108.

SHI, Z. Computer Program for Mixed-Mode Type Crack Analysis in Concrete Using EFCM (CAIC-M12.FOR). **Crack Analysis in Structural Concrete**, p. 303-315, 2009.

SHOKRIEH. **Residual stresses in composite materials**. 1. ed. [S.l.]: Woodhead Publishing

Limited, 2014.

SHOKRIEH, M. M. Residual stresses in composite materials.. **Woodhead publishing**, 2021.

SHOKRIEH, M. M.; KAMALI, S. M. Theoretical and experimental studies on residual stresses in laminated polymer composites. **Composite Materials**, p. 2213 – 25, 2005.

SIMULIA. Abaqus Analises User's Manual. In: **SIMULIA Contour integral evaluation**. [S.l.]: [s.n.], v. 6.10, 2022. Cap. 11.4.2.

SIMULIA, D. S. **ABAQUS (6.14-2)**. RI: Simulia, v. IV, 2014.

SOUSA, F. Comportamento mecânico à tração e tenacidade à fratura de compósitos com fibras vegetais in natura e tratadas. In: _____ **Dissertação de Mestrado**. Belém: [s.n.], 2019. p. 100.

SOBRAL, Hernani Sávio. **Propriedades do concreto fresco**. Ass. Brasil. Cim. Portland, S. Paulo, 2000.

STAMATOPOULOS, K. **Measurement of Residual Stresses on Composite Materials with the Incremental Hole Drilling Method**. [S.l.]: School of Naval Architecture and Marine Engineering, 2011.

SURENDRA P. SHAH, S. E. S. **Fracture mechanics of concrete**: applications of fracture mechanics to concrete, rock and other quasi-brittle materials. New york: JohnWiley and Sons, v. I, 1955.

TABATABAEIAN, A. *et al.* Residual Stress in Engineering Materials: A Review. **Advanced Engineering Materials**, 2021.

TABATABAEIAN, A.; A.R., G.; ASGHARI, B. Specification of non-uniform residual stresses and tensile characteristic in laminated composite materials exposed to simulated space environment. **Polym. Test.**, p. 106147, 2019.

TADA, H. *et al.* The Stress Analysis of Cracks Handbook. **ASME Press**, 2000.

TAWFIK, A. *et al.* Nonlinear ABAQUS Simulations for Notched Concrete Beams. **Materials**, 2021.

TRUONG, G. T.; PARK, S.-H.; CHOI, K.-K. Tensile Behaviors of Lap-Spliced Carbon Fiber-Textile Reinforced Mortar Composites Exposed to High Temperature. **Materials**, p. 1512, 2019.

VANTADORI, S. *et al.* Mode I fracture toughness of fibre-reinforced concrete by means of a modified version of the two-parameter model. **Procedia Structural Integrity**, p. 2889-2895, 2016.

VISHAUL, K.; MANIKANDAPRABHU, S.; RADHAKRISHNAN, R. Structural behavior of hybrid fiber reinforced concrete – An. **Materials Today: Proceedings**, XXXIV, p. 818-822, 2020.

WAGNER, H. D.; NAIRN, J. A. Residual thermal stresses in three concentric transversely isotropic cylinders: application to thermoplastic–matrix composites containing a trans crystalline interphase. **Composite Science & Technology**, p. 1289 – 302, 1997.

WANG, H. E. A. Effects of thermal residual stresses on tensile and interlaminar shear behaviors of GLARE laminates. **Applied Composite Materials**, p. 877-898, 2021.

WANG, S. K.; KOWALIK, D. P.; CHUNG, D. D. L. Self- sensing attained in carbon fiber-polymer-matrix structural composites by using the interlaminar interface as sensor. **Smart Material Structures**, p. 570 – 92, 2004.

WATT, G. C. E. A. The determination of thermal residual stresses in unidirectional and cross-ply titanium matrix composites using an etch removal method. **Journal of Composite Materials**, p. 1663-1679, 2020.

XARGAY, H. *et al.* Temperature effects on failure behavior of self-compacting high strength plain and fiber reinforced concrete. **Construction and Building Materials**, p. 723-734, 2018.

YAN, J.-B.; XIE, J. Behaviours of reinforced concrete beams under low temperatures. **Construction and Building Materials**, p. 410-425, 2017.

YANG, L. *et al.* Prediction on residual stresses of carbon/epoxy composite at cryogenic temperature. Polymer Composites. **Polymer Composites**, p. 3412-3420, 2019.

YISKA, G. *et al.* Sensory carbon fiber based textile-reinforced concrete for smart structures. **Journal of Intelligent Materials Systems and Structures**, Aachen, 20 February 2015. 469-489.

ZÁRATE, F.; CORNEJO, A.; OÑATE, E. A three-dimensional FEM–DEM technique for predicting the evolution of fracture in geomaterials and concrete. **Computational particle mechanics**, p. 411-420, 2018.

ZHIGANG, Z.; QIAN, Z. Matrix tailoring of Engineered Cementitious Composites (ECC) with non-oil-coated, low tensile strength PVA fiber. **Construction and Building Materials**, p. 420-431, 2018.

ZIEBA, J.; BUDA-OZOG, L.; SKRZYPCZAK. Probabilistic method and FEM analysis in the design and analysis of cracks widths. Eng Struct. **Engineering Structures**, p. 110022, 2020.

ZOBEIRY, N.; POURSAITIP, A. The origins of residual stress and its evaluation in composite materials. **In: Structural integrity and durability of advanced composites. Woodhead Publishing**, p. 43-72, 2015.

APÊNDICE

#This program was created by the Author based on the laminate theory to obtain residual stress.

#all rights reserved to the Author

```
import numpy as np
```

```
from numpy import *
```

```
import math
```

```
print ('##### #This program was created by the Author based on the laminate theory to  
obtain residual stress.All rights reserved to the Author #####')
```

```
#-----Material Properties-----
```

```
Ef=231 #GPa fiber
```

```
vol=0.01 #% já convertido
```

```
vf=0.2 # Poisson's ratio fiber
```

```
Em=26.10 #GPa concrete
```

```
vm=0.25 # Poisson's ratio concrete
```

```
alfa_m=8.0*10**(-6) # linear coefficient of thermal expansion of longitudinal concrete
```

```
alfa_fl= -3.8*10**(-6) #thermal linear coefficient of longitudinal expansion of the fiber
```

```
alfa_fr= 20*10**(-6) #thermal linear coefficient of radial expansion of the fiber
```

```
t=0.001 # thickness in meters
```

```
x=90 # angle in degrees
```

```
theta=x*np.pi/180
```

```
#-----
```

```
#Step 1:Calculate properties
```

```
print ('##### step 1 #####')
```

```
E11=Ef*vol+Em*(1-vol)
```

```
print ('E11=',E11)
```

```
E22=(Ef*Em)/(((Ef)*(1-vol)+(vm)*vol))
```

```
print ('E22=',round(E22,3))
```

```

v12=vf*vol+vm*(1-vol)
print ('v12=',v12)
v21=(E22/E11)*v12
print ('v21=',round(v21,3))
#calculate G12
Gf=Ef/(2*(1+vf))
#print ('Gf=',round(Gf,3))
Gm=Em/(2*(1+vm))
#print ('Gm=',round(Gm,3))
G12=Gf*Gm/((Gf*(1-vol))+(Gm*vol))
print ('G12=',round (G12,3))
v23=v12*((1-v21)/(1-v12))#novo
print ('v23=',round (v23,3))
G23=E22/(2*(1+v23))#novo
print ('G23=',round (G23,3))#novo
#Step 2: Calculate Q11 , Q 22 , Q 12 , Q 21 , and Q 66
print ('##### step 2 #####')
Q11=E11/(1-(v12*v21))
print ('Q11=',round(Q11,3))
Q22=E22/(1-(v12*v21))
print ('Q22=',round (Q22,3))
Q12=E22*v12/(1-(v12*v21))
print ('Q12=Q21=',round (G12,3))
Q66=G12
print ('Q66=',round (Q22,3))
Q16=0
print ('Q16=',round (Q16,3))
Q26=0
print ('Q26=',round (Q26,3))
##propriedades expansão termica das fibras pardini e neto(2006)
#Step 3 U
print ('##### step 3 #####')
U1=(1/8)*(3*Q11+3*Q22+2*Q12+4*Q66)
print ('U1=',round (U1,3))

```

```

U2=(1/2)*(Q11-Q22)
print ('U2=',round (U2,3))
U3=(1/8)*(Q11+Q22-2*Q12-4*Q66)
print ('U3=',round (U3,3))
U4=(1/8)*(Q11+Q22+(6*Q12)-(4*Q66))
print ('U4=',round (U4,3))
U5=(1/2)*(U1-U4)
print ('U5=',round (U5,3))

#Step 4: Calculate Q11 , Q 22 , Q 12 , Q 16 , Q 26 , and Q 66
print ('##### step 4 Q+45°(GPa) #####')

Q11_=round(U1+U2*np.cos(2*theta)+U3*np.cos(4*theta),3)
print ('Q11_=',round (Q11_,3))

Q22_=round(U1-U2*np.cos(2*theta)+U3*(np.cos(4*theta)),3)
print ('Q22_=',round (Q22_,3))

Q12_=Q21_=round(U4-U3*np.cos(4*theta),3)
print ('Q12_=',round (Q12_,3))

Q66_=round(U5-(U3*np.cos(4*theta)),3)
print ('Q66_=',round (Q66_,3))

Q16_=round(((1/2)*U2*np.sin(2*theta))+(U3*np.sin(4*theta)),3)
print ('Q16_=',round(Q16_,3))

Q26_=round((1/2)*(U2*np.sin(2*theta))-(U3*np.sin(4*theta)),3)
print('Q26_=',round(Q26_,3))

# for a -45° lamina
print ('##### step 5 Q-45°(GPa) #####')
Q11_invtheta=Q11_
print('Q11_invtheta=',round(Q11_invtheta,3))

```

```

Q22_invtheta=Q22_
print('Q22_invtheta=',round(Q22_invtheta,3))
Q12_invtheta=Q12_
print('Q12_invtheta=',round(Q12_invtheta,3))
Q66_invtheta=Q66_
print('Q66_invtheta=',round(Q66_invtheta,3))
Q16_invtheta=-Q16_
print('Q16_invtheta=',round(Q16_invtheta,3))
Q26_invtheta=-Q26_
print('Q26_invtheta=',round(Q26_invtheta,3))

print ('##### step 6 MATRIZ Q 0°(GPa) #####')
Q0 =np.array ([
    [Q11, Q12 ,Q16],
    [Q12, Q22 ,Q26],
    [Q16, Q26 ,Q66]
])
#z=Q0[1,1]
#print(z)
print ('Q0=')
print (Q0)
#Q0inv=np.linalg.inv(Q0)
#print('Qinv',Q0inv)
#ao=np.matmul(Q0,Q0inv)
#print('ao',ao)
print ('##### step 7 MATRIZ Q+45°(GPa) #####')
Q45 =np.array ([
    [Q11_, Q12_ ,Q16_],
    [Q12_, Q22_ ,Q26_],
    [Q16_, Q26_ ,Q66_]
])

print ('Q45=')
print (Q45)

```

```

print ('##### step 8 MATRIZ Q-45°(GPa) #####')
Q45inv =np.array ([
    [Q11_invtheta, Q12_invtheta ,Q16_invtheta],
    [Q12_invtheta, Q22_invtheta ,Q26_invtheta],
    [Q16_invtheta, Q26_invtheta ,Q66_invtheta]
])

print ('Q45invtheta=')
print (Q45inv)
Q45inv2=np.linalg.inv(Q45)
print('Qinv')
print(Q45inv2)
print ('MATRIZ A em x10^6 N/m')
# os coeficientes de expansão térmica da fibra (Pardini e Neto,2006)
h1=0
h0=-0.006
h2=0.006
#t1=h1-h0
#print(t1)
#t2=h2-h1
#print(t2)
#t=0.006 # unidade m
n= 1 #numero da camadas Simetricas
A=(n*(((Q45*10**3)*(h1-h0))+(((Q45inv*10**3)*(h2-h1))))) #N/m²
print(A)

print ('MATRIZ B em N x10³')
#t=0.006 # unidade m
B=(n*0.5)*(((Q45*10**6)*((h1**2)-(h0**2)))+((Q45inv*10**6)*((h2**2)-(h1**2))))) #N/m²
print(B)
print ('MATRIZ D em N.m')
#t=0.006 # unidade m

```

```

D=(n*(1/3))*(((Q45*10**9)*((h1**3)-(h0**3)))+((Q45inv*10**9)*((h2**3)-(h1**3))))
#N/m²
print(D)

```

```

#soma=0
#for i in range(3):
#  numero = int(input("informe um numero:"))
#  soma=soma+numero
#  print(" A soma do numero é:{ }".format(soma))
p=2 #numero de camadas
#-----
#-----calculo Qi---e hi-----
def Q(i):
    if i == 1:
        return(Q0) # Mudar conforme a angulação trabalhada antes Q45
    elif i == 2:
        return (Q45) #obs90°# Mudar conforme a angulação trabalhada Q45inv
    if i == 3:
        return(Q45) # Mudar conforme a angulação trabalhada antes Q45
    elif i == 4:
        return (Q45) #obs90°# Mudar conforme a angulação trabalhada Q45inv
    if i == 5:
        return(Q45) # Mudar conforme a angulação trabalhada antes Q45
    elif i == 6:
        return (Q0) #obs90°# Mudar conforme a angulação trabalhada Q45inv
def h(i):
    if i==1:
        return(-2*t)
    elif i==0:
        return (-3*t)
    elif i==2:
        return (-t)
    elif i==3:
        return (0)

```



```

elif i==4:
    return (t)
elif i==5:
    return (2*t)
elif i==6:
    return (3*t)

def A(i):
    return Q(i)*(h(i)-h(i-1))
def B(i):
    return Q(i)*(h(i)**2-h(i-1)**2)
def D(i):
    return Q(i)*(h(i)**3-h(i-1)**3)
# if i==2:
#     #return f(i)+f(i-1)
# print(f(i)+f(i-1))
# for i in range(1,3):
#     #f=Q(i)*(h(i)-h(i-1))
#     #f2=Q(i)*(h(i)-h(i-1))
#     # print (f'f{i} =' ,f)
#     #print (f'f{i} =' ,f2)

print('##### Matriz A x10^6 N/m #####')
A1=A(1)
#print('a1',A1)
A2=A(2)
A3=A(3)
A4=A(4)
A5=A(5)
A6=A(6)
#print('a2',A2)
#A4=A(3)
#A5=A(4)
MA=((A1+A2+A3+A4+A5+A6)*1000)#x10^6 N/m

```

```

print(MA)
MA2=((A1+A2+A3+A4+A5+A6))/(2*t)#x10^9 N/m ---sem o t
print(MA2)
MAinv=(10**2)*np.linalg.inv(MA)
#print('Qinv',MAinv)
#MultMat=np.matmul(MA,MAinv)
#print('MultMat',MultMat)

print('##### Matriz B x10^3 #####')
B1=B(1)
#print('b1',B1)
B2=B(2)
B3=B(3)
B4=B(4)
B5=B(5)
B6=B(6)
#print('b2',B2)
MB=((B1+B2+B3+B4+B5+B6)*10**6*0.5)
print(MB)

print('##### Matriz D N.m #####')
#print('Matriz D')
D1=D(1)
#print('d1',D1)
D2=D(2)
D3=D(3)
D4=D(4)
D5=D(5)
D6=D(6)
#print('d2',D2)
MD=((D1+D2+D3+D4+D5+D6)*10**9*(1/3))
print(MD)
print('-----Matrizes B_Ainv_B -----')
print('[MAinv]x10^-8 N/m')

```

```

print(MAinv) #[A^-1]
#-----[B]*[A^-1]*[B]-----
B_Ainv=np.matmul(MB,MAinv)
#print('B_Ainv')
#print(B_Ainv)
B_Ainv=np.matmul(10**3*MB,10**-8*MAinv)
B_Ainv_B=np.matmul(B_Ainv,MB)
print('[B_Ainv_B] x10^3 N.m')#[B]*[A^-1]*[B]
print(B_Ainv_B)
#-----[D*]-----
D_=MD-(10**(3)*B_Ainv_B)
print('[D*] N.m')
print(D_)
#-----[D1]-----
D1=(10**4)*np.linalg.inv(D_)
print('[D1] x10^-4 1/Nm')
print(D1)
D11=(D1*10**(-4)*0.006**3)
print(D11)
#-----[B1]-----
B1_=np.matmul(-MAinv,MB)
B1=np.matmul(B1_,D1)
print('[B1] 10^-9 1/N ')
print(B1)

#-----[C1]-----
C1_=np.matmul(-D1,MB)
C1=np.matmul(C1_,MAinv)
print('[C1] 10^-9 1/N ')
print(C1)
print('[C1] 1/N *ja Multiplicado por 10^-9')
C11=(C1*10**(-9)*0.006**2)
print(C11)
#-----[A1]-----

```

```

AB1_=np.matmul(10**(-8)*MAinv,10**(3)*MB)
ABD=np.matmul(AB1_,D1*10**(-4))
ABDB=np.matmul(ABD,MB*10**(3))
ABDBA=np.matmul(ABDB,MAinv*10**(-8))
#print('[AinvBDBAinv]') #correto so está oculto
#print(ABDBA)
A1=((10**(-8))*MAinv)+ABDBA
print('[A1]x10^-9 m/N')
print(A1*10**9)
print('-----')
#-----
print('##### Propriedades termicas da fibra e matriz _lamina_#####')

#-----
print('#####MATRIZ T*(103) t.N/°C #####')

#Step : [T*] and [T**] matrices for the laminate
#somatorio das camadas
z=0# angulo em graus
theta1=z*np.pi/180
w=90# angulo em graus
theta2=w*np.pi/180
alfa_xx1=-2.34E-006      # alfa 11
alfa_yy1=5.03E-006      # alfa 22
#alfa_xy1=0
alfa_xy1=(2*np.sin(theta1)*np.cos(theta1))*(alfa_xx1-alfa_yy1) # camada 1 -0
print ('alfa_xy1-90°',round (alfa_xy1,3))
alfa_xy2=(2*np.sin(theta2)*np.cos(theta2))*(alfa_xx1-alfa_yy1) # camada 2-90
print ('alfa_xy2-0°',alfa_xy2)

#-----

T1=(Q11*alfa_xx1*10**6+Q12*alfa_yy1*10**6)+(Q11_*alfa_yy1*10**6+Q12_*alfa_xx1*
10**6)

```

```

print('T1 =',T1)
T2=(Q12*alfa_xx1*10**6+Q22*alfa_yy1*10**6)+(Q12_*alfa_yy1*10**6+Q22_*alfa_xx1*
10**6)
print('T1 =',T2)
T3=(Q16*alfa_xx1*10**6+Q26*alfa_yy1*10**6)+(Q16_*alfa_yy1*10**6+Q26_*alfa_xx1*
10**6)
print('T1 =',T3)

print('#####MATRIZ T**(103) t.N/°C #####')
T1_=(1/2)*((Q11*(-1)*alfa_xx1*10**6+(-
1)*Q12*alfa_yy1*10**6)+(Q11_*alfa_yy1*10**6+Q12_*alfa_xx1*10**6))
print('T1 =',T1_)
T2_=(0.5)*((Q12*(-1)*alfa_xx1*10**6+Q22*(-
1)*alfa_yy1*10**6)+(Q12_*alfa_yy1*10**6+Q22_*alfa_xx1*10**6))
print('T1 =',T2_)
T3_=(0.5)*((Q16*alfa_xx1*10**6+Q26*alfa_yy1*10**6)+(Q16_*alfa_yy1*10**6+Q26_*al
fa_xx1*10**6))
print('T1 =',T3_)

print('----- MATRIZ [T] -----')

def Q01(i):
    if i==1:
        return (np.array ([
            [Q(i)[0,0]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[0,2]*alfa_xy1*(h(i)-h(i-1))*10**6],
            [Q(i)[1,0]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[1,2]*alfa_xy1*(h(i)-h(i-1))*10**6],
            [Q(i)[2,0]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[2,2]*alfa_xy1*(h(i)-h(i-1))*10**6]
        ]))
    elif i==2:
        return (np.array ([
            [Q(i)[0,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6

```

```

+Q(i)[0,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6],
    [Q(i)[1,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[1,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6],
    [Q(i)[2,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[2,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6]
    ))
elif i==3:
    return (np.array ([
        [Q(i)[0,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[0,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6],
        [Q(i)[1,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[1,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6],
        [Q(i)[2,0]*alfa_yy1*(h(i)-h(i-1))*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_xx1*(h(i)-h(i-1))*10**6
+Q(i)[2,2]*alfa_xy2*(h(i)-h(i-1))*10**6]
    ]))
def Q02(i):
    if i==1:
        return ((1/2)*np.array ([
            [Q(i)[0,0]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[0,2]*alfa_xy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
            [Q(i)[1,0]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[1,2]*alfa_xy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
            [Q(i)[2,0]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[2,2]*alfa_xy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6]
        ]))
    elif i==2:
        return ((1/2)*np.array ([
            [Q(i)[0,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[0,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
            [Q(i)[1,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[1,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
            [Q(i)[2,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[2,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6]
        ]))

```

```

elif i==3:
    return ((1/2)*np.array ([
        [Q(i)[0,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[0,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6 +Q(i)[0,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
        [Q(i)[1,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[1,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[1,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6],
        [Q(i)[2,0]*alfa_yy1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+ Q(i)[2,1]*alfa_xx1*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6+Q(i)[2,2]*alfa_xy2*(h(i)**2-h(i-1)**2)*10**6]
    ]))
#####-----
Q011=Q01(1)
Q012=Q01(2)
Q013=Q01(3)
#####-----
Q0111=Q02(1)
Q0122=Q02(2)
Q0133=Q02(3)
#print ('Q01=')
#print (Q011)
#print ('Q02=')
#print (Q012)
print ('T01')
T01=2*(Q011+Q012+Q013)
print (T01)
print ('T02')
T02=2*(Q0111+Q0122+Q0133)
print (T02)

print('----- MATRIZ [k] -----')
MT =np.array ([
    [T1],
    [T2],
    [T3]
])

```

```
print ('M_T x10^3=')
```

```
print (MT)
```

```
MT2=np.array ([
```

```
    [T1_],
```

```
    [T2_],
```

```
    [T3_]
```

```
])
```

```
print ('MT2 x10^3=')
```

```
print (MT2)
```

```
k1=np.matmul(C11,T01*10**(3))
```

```
print ('[k1]=')
```

```
print (k1)
```

```
k2=np.matmul(D11,T02*10**(3))
```

```
print ('[k2]=')
```

```
print (k2)
```

```
k=k1+k2
```

```
print ('[k]=')
```

```
print (k)
```

```
print('----- MATRIZ [deformação e] -----')
```

```
e=np.matmul(MAinv*10**-8,T01*10**(3))
```

```
print ('[e]=')
```

```
print(e)
```

```
print ('residual strains in each layer')
```

```
ef0=np.array ([
```

```
    [alfa_xx1],
```

```
    [alfa_yy1],
```

```
    [alfa_xy1]
```

```
])
```



```

print ('ef 0 =')
print (ef0)
ef90 =np.array ([
    [alfa_yy1],
    [alfa_xx1],
    [alfa_xy2]
])

print ('ef 90=')
print (ef90)

ef0r =e-ef0
print ('ef0r=')
print (ef0r)

ef90r =e-ef90
print ('ef90r=')
print (ef90r)
print ('-----residual stresses in each layer-----')
tr0=np.matmul(Q0*10**9,ef0r) #
print ('tr0=')
print (tr0)
tr90=np.matmul(Q45*10**9,ef90r)#
print ('tr90=')
print (tr90)

# the residual stresses N/m²:
print ('-----residual stresses in each layer x delta t-----')
tr01=tr0*(-130)
print ('tr01=')
print (tr01)

tr901=tr90*(-130)

```

```
print ('tr901=')
```

```
print (tr901)
```

```
print ('##### #This program was created by the Author based on the laminate theory to  
obtain residual stress.All rights reserved to the Author #####')
```

```
##### #This program was created by the Author based on the laminate theory to obtain  
residual stress.All rights reserved to the Author #####
```

```
##### step 1 #####
```

```
E11= 28.149
```

```
E22= 26.363
```

```
v12= 0.2495
```

```
v21= 0.234
```

```
G12= 10.534
```

```
v23= 0.255
```

```
G23= 10.505
```

```
##### step 2 #####
```

```
Q11= 29.892
```

```
Q22= 27.996
```

```
Q12=Q21= 10.534
```

```
Q66= 27.996
```

```
Q16= 0
```

```
Q26= 0
```

```
##### step 3 #####
```

```
U1= 28.721
```

```
U2= 0.948
```

```
U3= 0.223
```

```
U4= 7.208
```

```
U5= 10.757
```

```
##### step 4 Q+45°(GPa) #####
```

```
Q11_= 27.996
```

```
Q22_= 29.892
```

```
Q12_= 6.985
```

```
Q66_= 10.534
```

```

Q16_= 0.0
Q26_= 0.0
##### step 5 Q-45°(GPa) #####
Q11_invtheta= 27.996
Q22_invtheta= 29.892
Q12_invtheta= 6.985
Q66_invtheta= 10.534
Q16_invtheta= -0.0
Q26_invtheta= -0.0
##### step 6 MATRIZ Q 0°(GPa) #####
Q0=
[[29.89172846 6.98488359 0.    ]
 [ 6.98488359 27.9955254 0.    ]
 [ 0.        0.        10.53391326]]
##### step 7 MATRIZ Q+45°(GPa) #####
Q45=
[[27.996 6.985 0. ]
 [ 6.985 29.892 0. ]
 [ 0.    0.    10.534]]
##### step 8 MATRIZ Q-45°(GPa) #####
Q45invtheta=
[[27.996 6.985 -0. ]
 [ 6.985 29.892 -0. ]
 [-0.    -0.    10.534]]
Qinv
[[ 0.03793082 -0.00886347 0.    ]
 [-0.00886347 0.03552493 0.    ]
 [ 0.        0.        0.0949307 ]]
MATRIZ A em x10^6 N/m
[[335.952 83.82 0. ]
 [ 83.82 358.704 0. ]
 [ 0.    0.    126.408]]
MATRIZ B em N x10^3
[[ 0. 0. -0.]

```

[0. 0. -0.]

[-0. -0. 0.]]

MATRIZ D em N.m

[[4031.424 1005.84 0.]

[1005.84 4304.448 0.]

[0. 0. 1516.896]]

Matriz A x10⁶ N/m

[[171.76745691 41.90976717 0.]

[41.90976717 175.5590508 0.]

[0. 0. 63.20382651]]

[[85.88372846 20.95488359 0.]

[20.95488359 87.7795254 0.]

[0. 0. 31.60191326]]

Matriz B x10³

[[-1.35525272e-14 0.00000000e+00 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 1.35525272e-14 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 -3.38813179e-15]]

Matriz D N.m

[[527.94056043 125.72852544 0.]

[125.72852544 514.0339884 0.]

[0. 0. 189.61090125]]

-----Matrizes B_Ainv_B -----

[MAinv]x10⁻⁸ N/m

[[0.61818955 -0.1475753 0.]

[-0.1475753 0.60483835 0.]

[0. 0. 1.58218269]]

[B_Ainv_B] x10³ N.m

[[1.13543488e-33 2.71053023e-34 0.00000000e+00]

[2.71053023e-34 1.11091260e-33 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 1.81625665e-34]]

[D*] N.m

[[527.94056043 125.72852544 0.]

[125.72852544 514.0339884 0.]

[0. 0. 189.61090125]]

[D1] $\times 10^{-4}$ 1/Nm

[[20.11310049 -4.91950051 0.]

[-4.91950051 20.65723626 0.]

[0. 0. 52.73958372]]

[[4.34442971e-10 -1.06261211e-10 0.00000000e+00]

[-1.06261211e-10 4.46196303e-10 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 1.13917501e-09]]

[B1] 10^{-9} 1/N

[[1.58669081e-13 9.91244704e-17 0.00000000e+00]

[9.90104122e-17 -1.59490096e-13 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 2.82718104e-13]]

[C1] 10^{-9} 1/N

[[1.58669081e-13 9.90104122e-17 0.00000000e+00]

[9.91244704e-17 -1.59490096e-13 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 2.82718104e-13]]

[C1] 1/N *ja Multiplicado por 10^{-9}

[[5.71208692e-27 3.56437484e-30 0.00000000e+00]

[3.56848093e-30 -5.74164345e-27 0.00000000e+00]

[0.00000000e+00 0.00000000e+00 1.01778518e-26]]

[A1] $\times 10^{-9}$ m/N

[[6.18189548 -1.47575303 0.]

[-1.47575303 6.0483835 0.]

[0. 0. 15.82182686]]

Propriedades termicas da fibra e matriz _lamina_#####

#####MATRIZ $T^*(10^3)$ t.N/°C #####

alfa_xy1-90° -0.0

alfa_xy2-0° -9.025646909715994e-22

T1 = 89.66229985933376

T1 = 89.66013516767045

T1 = 0.0

#####MATRIZ $T^*(10^3)$ t.N/°C #####

T1 = 79.64383007033311

T1 = -79.64279758383523

$$T1 = 0.0$$

----- MATRIZ [T] -----

T01

$$\begin{bmatrix} 4.28274560e-01 \\ 1.09694810e-01 \\ -3.80304658e-17 \end{bmatrix}$$

T02

$$\begin{bmatrix} -3.23836519e-04 \\ -4.83113406e-04 \\ 3.80304658e-20 \end{bmatrix}$$

----- MATRIZ [k] -----

$$M_T \times 10^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 89.66229986 \\ 89.66013517 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$MT2 \times 10^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 79.64383007 \\ -79.64279758 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$[k1] =$$

$$\begin{bmatrix} 2.44673250e-24 \\ -6.28300199e-25 \\ -3.87068443e-40 \end{bmatrix}$$

$$[k2] =$$

$$\begin{bmatrix} -8.93522839e-11 \\ -1.81152155e-10 \\ 4.33233562e-26 \end{bmatrix}$$

$$[k] =$$

$$\begin{bmatrix} -8.93522839e-11 \\ -1.81152155e-10 \\ 4.33233562e-26 \end{bmatrix}$$

----- MATRIZ [deformação e] -----

$$[e] =$$

$$\begin{bmatrix} 2.48566612e-06 \end{bmatrix}$$

[3.14488035e-08]

[-6.01711446e-22]]

residual strains in each layer

ef 0 =

[[-2.34e-06]

[5.03e-06]

[-0.00e+00]]

ef 90=

[[5.03000000e-06]

[-2.34000000e-06]

[-9.02564691e-22]]

ef0r=

[[4.82566612e-06]

[-4.99855120e-06]

[-6.01711446e-22]]

ef90r=

[[-2.54433388e-06]

[2.37144880e-06]

[3.00853245e-22]]

-----residual stresses in each layer-----

tr0=

[[1.09333203e+05]

[-1.06230351e+05]

[-6.33837617e-12]]

tr90=

[[-5.46666015e+04]

[5.31151755e+04]

[3.16918809e-12]]

-----residual stresses in each layer x delta t-----

tr01=

[[-1.42133164e+07]

[1.38099456e+07]

[8.23988903e-10]]

tr901=

```
[[ 7.10665819e+06]
```

```
[-6.90497281e+06]
```

```
[-4.11994451e-10]]
```

```
##### #This program was created by the Author based on the laminate theory to obtain  
residual stress.All rights reserved to the Author #####
```

```
>>>
```